



Hendra Gunawan
Unsoed, 14 Mei 2018
“Beyond Calculus”

KETAKTERHINGGAAN DAN KEMAMPUAN BERPIKIR MANUSIA

Paradoks Zeno

ACHILLES

0

KURA-KURA

1

$1\frac{1}{2}$

t0



t1



t2

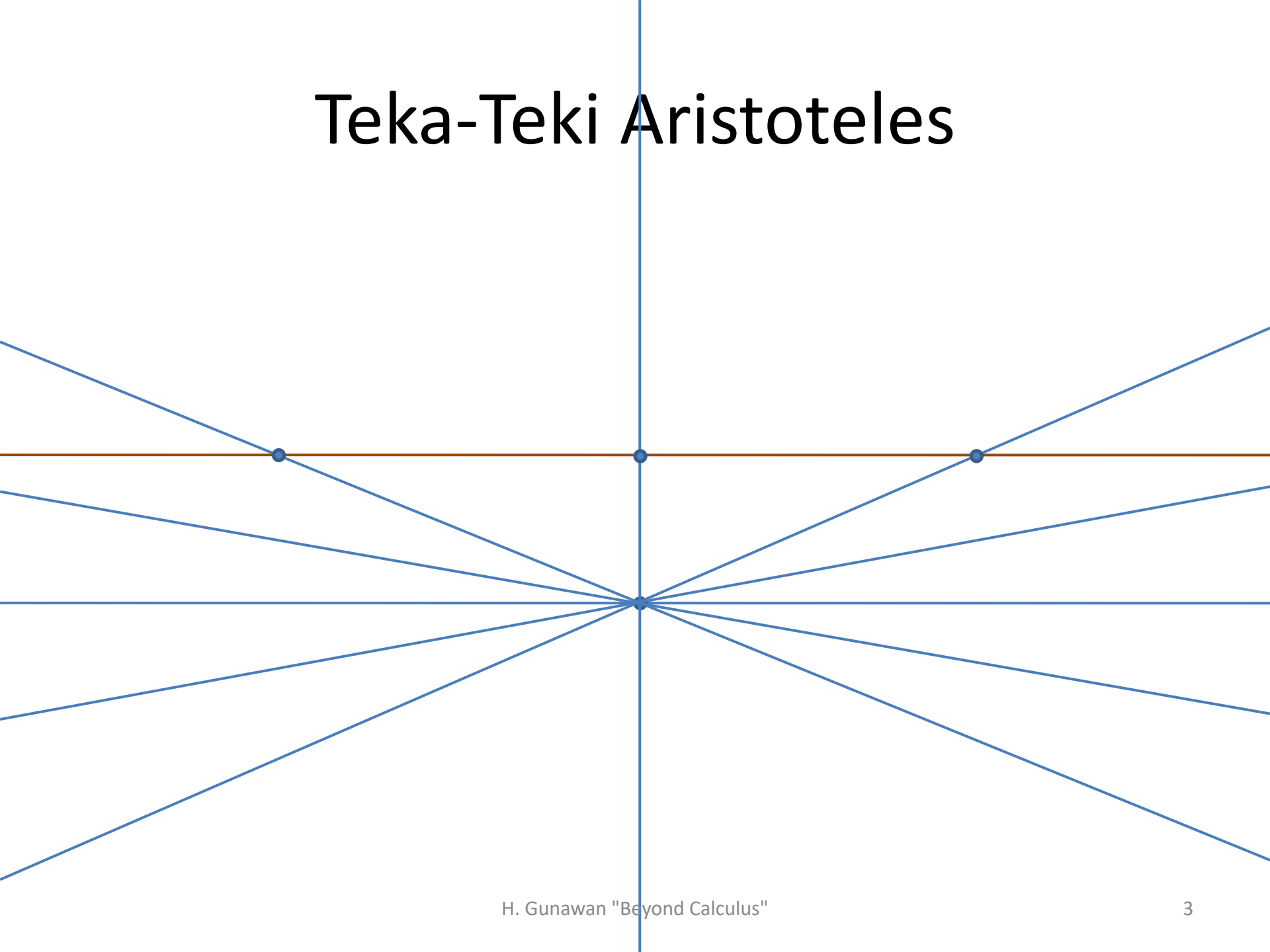


t3



$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = ?$$

Teka-Teki Aristoteles



Alam Fisis (1)

- $2,998 \times 10^8$, kecepatan **cahaya** (dalam meter per detik) di ruang hampa.
- 1×10^{14} , banyak **sel** dalam tubuh manusia.
- $9,46 \times 10^{15}$, jarak (dalam meter) yang ditempuh oleh **cahaya** dalam 1 tahun, yang dikenal sebagai 1 *tahun cahaya*.
- $1,41 \times 10^{17}$, waktu paruh (dalam detik) dari zat radioaktif **uranium**.
- $9,2 \times 10^{26}$, diameter (dalam meter) **alam semesta** yang dapat dilihat (*observable universe*).
- $5,1 \times 10^{96}$, densitas **alam semesta** (dalam kilogram per meter kubik) pada waktu Planck setelah *Big Bang*, yang dikenal sebagai *densitas Planck*.

$$1 \text{ googol} = 10^{100}$$

$$1 \text{ googolplex} = 10^{\text{googol}}$$

Alam Fisis (2)

- 1×10^{-12} , massa rata-rata (dalam kilogram) sebuah **sel manusia**.
- $1,675 \times 10^{-27}$, massa (dalam kilogram) sebuah **netron**.
- $1,673 \times 10^{-27}$, massa (dalam kilogram) sebuah **proton**.
- $9,11 \times 10^{-31}$, massa (dalam kilogram) sebuah **elektron** yang diam atau stasioner.
- $1,616 \times 10^{-35}$, panjang **tali** (*string*) terpendek (dalam meter), yang dikenal sebagai *panjang Planck*.
- $5,4 \times 10^{-44}$, interval **waktu** terpendek (dalam detik) yang bermakna, yang dikenal sebagai *waktu Planck*. **Alam semesta dapat diukur atau dipelajari mulai dari waktu ini (yakni, $5,4 \times 10^{-44}$ detik setelah *Big Bang*, bukan sejak $t = 0$).**

*Aristotle was right: the physical
world is finite.*

*But, as Plato put it, mathematics
is the world of ideas.*



$$\infty \cdot \frac{1}{\infty}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot \dots}$$

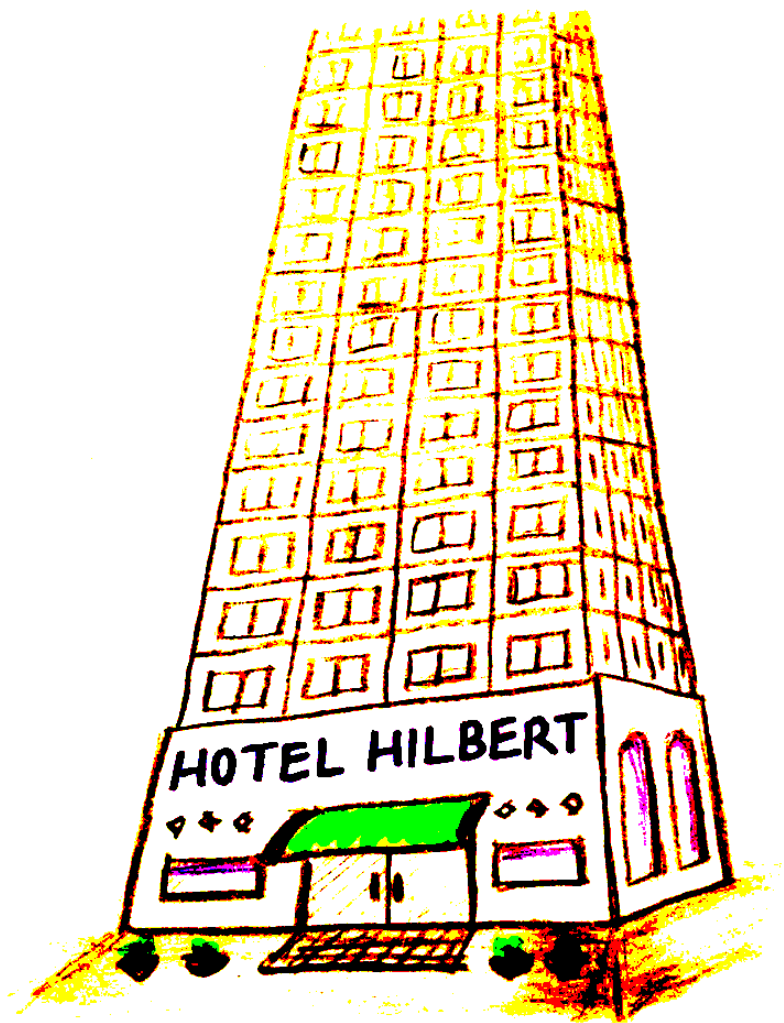
JOHN WALLIS (1616-1703)

Bilangan Asli & Ketakterhinggaan

N := {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...}.

Ada berapa banyak bilangan asli?
Tak terhingga.

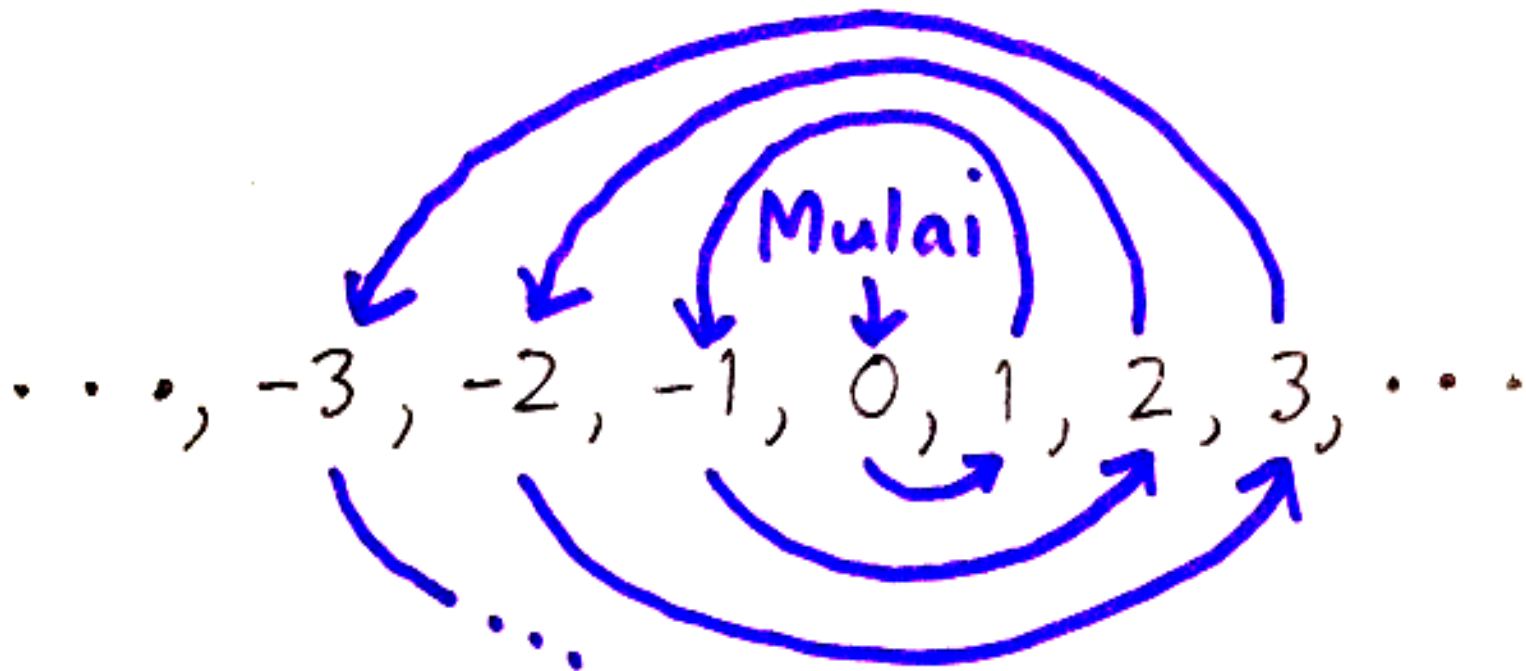
Paradoks Hotel Hilbert



$$\infty + 1 = \infty$$

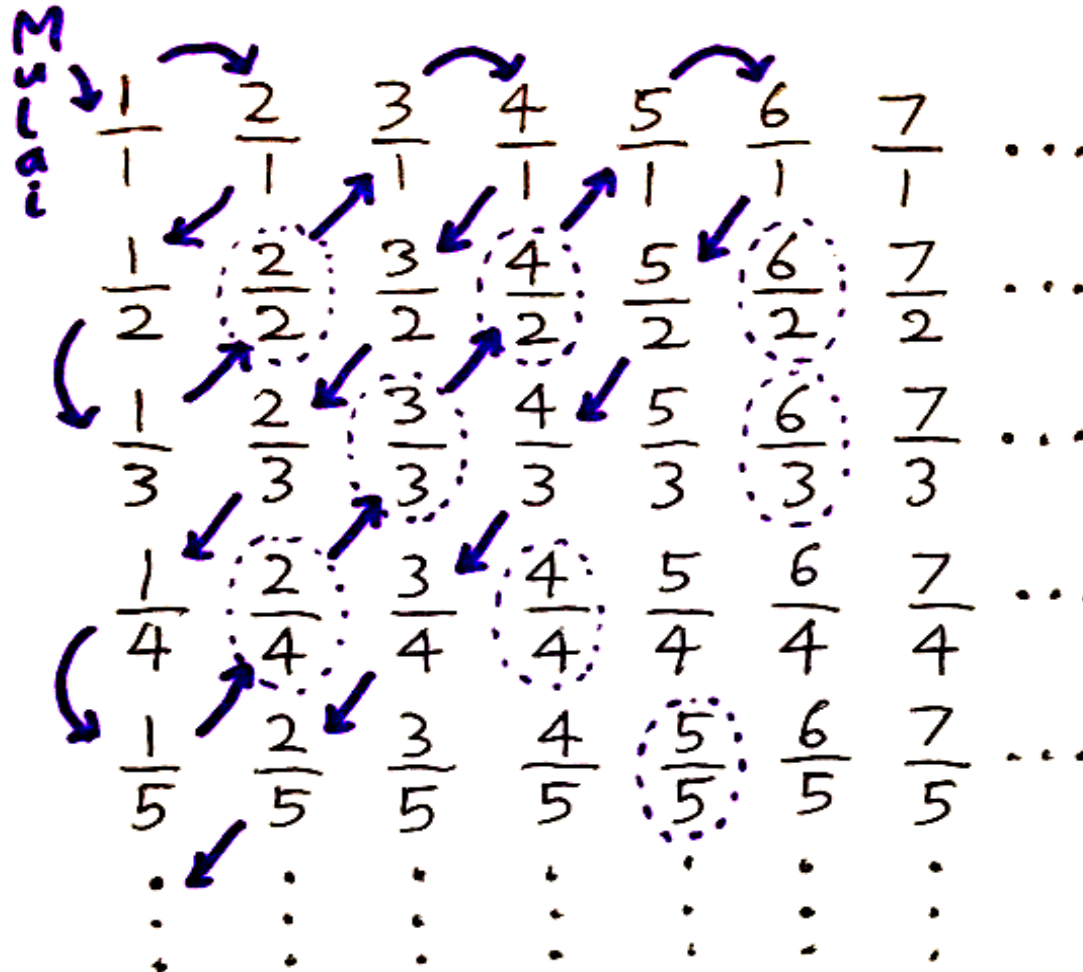
$$\infty + \infty = \infty$$

Bilangan Bulat



Himpunan Bilangan Bulat “**terbilang**”;
mempunyai anggota ‘sama banyak’ dengan **N**.

Bilangan Rasional



Bilangan Real

Andaikan $I = [0, 1]$ **terbilang**:

$$x_1 := 0, \textcolor{blue}{3}4920474041908...$$

$$x_2 := 0, \textcolor{green}{2}6890717574705...$$

$$x_3 := 0, 0\textcolor{red}{5}290316434691...$$

$$x_4 := 0, 613\textcolor{brown}{9}4505730583...$$

$$x_5 := 0, 8906\textcolor{violet}{5}867434121...$$

$$x_6 := 0, 71210\textcolor{orange}{1}02099354...$$

$\vdots$

Definisikan $y := 0, \textcolor{blue}{7}\textcolor{green}{2}\textcolor{red}{7}\textcolor{brown}{2}\textcolor{violet}{2}\textcolor{orange}{7}.....$

Maka $y \in I$, tetapi y tak termasuk dalam daftar di atas!

Metode
Diagonalisasi
Cantor

Ketakterhinggaan Tipe I & Tipe II

Kardinalitas Himpunan Bilangan Asli (**N**) = $\aleph_0$.

Kardinalitas Himpunan Bilangan Real (**R**) = $\mathfrak{c}$.

$$\mathfrak{c} > \aleph_0.$$

Interval $[0,1]$ dan Koleksi Himpunan Bagian dari $\mathbf{N}$

$$x = [0,01000110111\dots]_2 \in [0,1]$$



$$A_x = \{2, 6, 7, 9, 10, 11, \dots\} \in 2^{\mathbf{N}}.$$

Kardinalitas $[0,1]$ = kardinalitas $2^{\mathbf{N}}$.

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$

Ketakterhinggaan Mutlak



WELCOME TO CANTOR'S HEAVEN!

Hipotesis Kontinum



TIDAK ADA HIMPUNAN YANG
MEMPUNYAI KARDINALITAS DI
ANTARA $\aleph_0$ DAN $\mathfrak{c}$.

$$\aleph_1 = \mathfrak{c}.$$

Georg Cantor (1845-1918)

Kemampuan Berpikir Manusia:

How Far Can We Go?