MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2019/2020

17 April 2020

Kuliah Hari Ini

15.1 Persamaan Diferensial Linear Orde 2, Homogen

15.2 Persamaan Diferensial Linear Orde 2, Tak Homogen

15.3 Penggunaan Persamaan Diferensial Orde 2

MA1201 MATEMATIKA 2A

15.2 PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE 2, TAK HOMOGEN

Menentukan solusi khusus dan solusi umum persamaan diferensial linear orde 2 **tak homogen**

PDB Linear Orde 2, Tak Homogen

PDB linear orde 2 **tak homogen**, dengan koefisien konstanta, secara umum berbentuk

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = k(x),$$

dengan $k(\mathrm{x}) \neq 0$.

Jika y_p adalah solusi khusus persamaan tak homogen di atas dan y_h adalah solusi umum pers. homogen

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

maka solusi umum persamaan tak homogen di atas adalah: $y = y_h + y_p$.

Bagaimana mendapatkan y_p?

Metode Koefisien Tak Tentu

Kita dapat memperoleh solusi khusus y_p dengan cara coba-coba, dengan prinsip:

1. Jika $k(x)$ polinom, maka y_p juga polinom.
2. Jika $k(x) = a.e^{cx}$, maka $y_p = Ae^{cx}$.
3. Jika $k(x) = a.\cos rx + b.\sin rx$, maka $y_p = A.\cos rx + B.\sin rx$.

Catatan. Bilangan A dan B merupakan koefisien yang harus dicari. Karena itu metode ini dikenal sebagai **Metode Koefisien Tak Tentu**.

Contoh/Latihan 1

Tentukan solusi umum dari $y''-5y'+6y=x$.

Jawab: Solusi persamaan homogennya adalah $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. Untuk mencari solusi khusus, misalkan $y_p = Ax + B$ (mengapa?). Maka $y_p' = A$ dan $y_p'' = 0$. Substitusikan ke PDB di atas:

$$-5A + 6(Ax + B) = x.$$

Jadi $6A = 1$ dan $-5A + 6B = 0$, sehingga $A = 1/6$ dan $B = 5/36$. Jadi solusi umum PDB di atas adl

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + x/6 + 5/36.$$

Contoh/Latihan 2

Tentukan solusi umum dari $y''-4y'+4y=e^x$.

Jawab: Solusi persamaan homogennya adalah $y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. Untuk mencari solusi khusus, misalkan $y_p = \ldots$

Contoh/Latihan 3

Tentukan solusi umum dari $y''-5y'+6y=e^{2x}$.

Jawab: Solusi persamaan homogennya adalah $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. Untuk mencari solusi khusus, misalkan $y_p = \ldots$

Soal

Tentukan solusi umum/khusus dari

1. $y'' - 4y' = x + 1; y(0) = 0, y'(0) = 1.$
2. $y'' - 4y' + 5y = \cos x.$
3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$
4. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + 1.$

Metode Variasi Parameter

Untuk $k(x)$ sembarang, solusi khusus y_p dapat diperoleh dengan **Metode Variasi Parameter**:

Jika $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ adalah solusi yang saling bebas dari PDB homogen $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, maka solusi khusus PDB tak homogen

$y'' + a_1y' + a_2y = k(x)$ berbentuk

$$y_p = c_1(x).u_1(x) + c_2(x).u_2(x),$$

dengan

$$c_1'u_1 + c_2'u_2 = 0$$

$$c_1'u_1' + c_2'u_2' = k(x).$$

Contoh

Tentukan solusi umum PDB $y'' + y = \sec x$. [*]

<u>Jawab</u>: Solusi persamaan homogennya adalah

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Dgn metode variasi parameter, misalkan solusi khusus [*] berbentuk

$$y_p = c_1(x).\cos x + c_2(x).\sin x,$$

dengan $\quad c_1'.\cos x \ + c_2'.\sin x = 0$

$$c_1'.(-\sin x) + c_2'.\cos x = \sec x.$$

Dari kedua persamaan ini, didapat

$$c_1' = -\tan x \quad \text{dan} \quad c_2' = 1.$$

Jadi, $$c_1(x) = \int (-\tan x)dx = \ln|\cos x|;$$

$$c_2(x) = \int dx = x.$$

[Kita abaikan konstanta sembarang, karena kita sedang mencari *sebuah* solusi khusus.]

Dengan demikian, solusi khususnya adalah

$$y_p = (\ln|\cos x|).\cos x + x.\sin x;$$

dan karena itu solusi umum PDB [*] adalah

$$y = (\ln|\cos x| + C_1).\cos x + (x + C_2).\sin x.$$

Soal

Tentukan solusi umum PDB $y'' + y = \csc x . \cot x$.

<u>Jawab</u>: Solusi persamaan homogennya adalah

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Selanjutnya, misalkan solusi khusus [*] adalah

$$y_p = c_1(x).\cos x + c_2(x).\sin x,$$

dengan

$$c_1'.\cos x + c_2'.\sin x = 0$$

$$c_1'.(-\sin x) + c_2'.\cos x = \csc x.\cot x.$$

Dari kedua persamaan ini, didapat

$$c_1' = -\cot x \text{ dan } c_2' = \cot^2 x.$$

Jadi,

$$c_1(x) = \int (-\cot x)dx = -\ln|\sin x|;$$

$$c_2(x) = \int \cot^2 x.dx = \int (\csc^2 x - 1)dx = -\cot x - x.$$

Dengan demikian, solusi khususnya adalah

y_p = (-ln |sin x|).cos x – (x + cot x).sin x;

dan karena itu solusi umum PDB [*] adalah

y = (-ln |sin x| + C_1).cos x – (x + cot x + C_2).sin x.

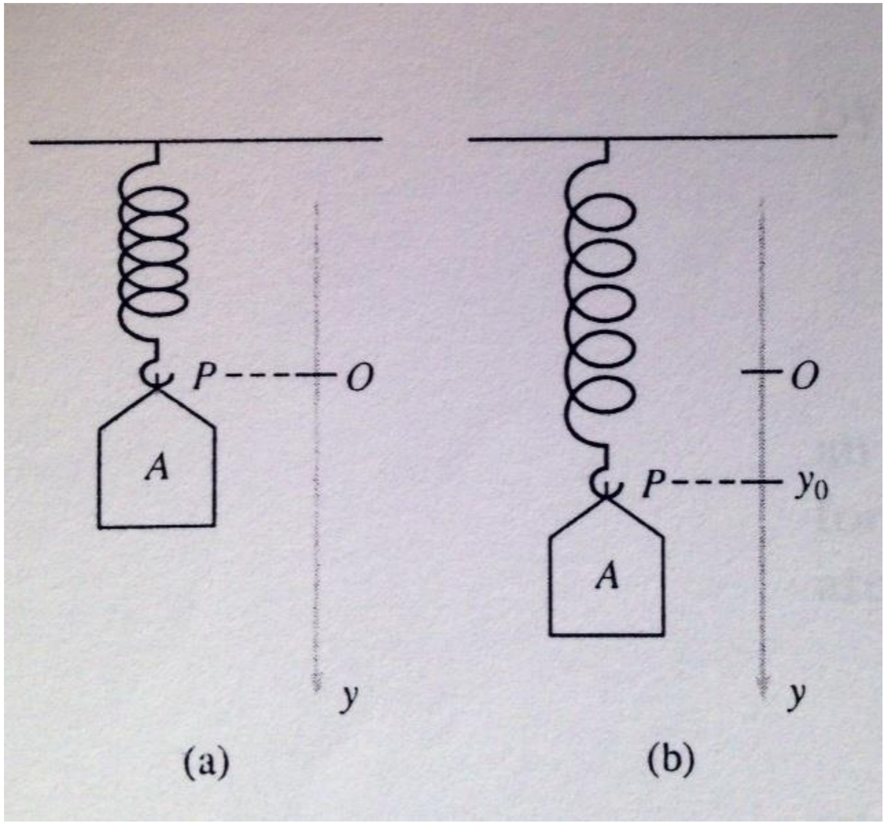
MA1201 MATEMATIKA 2A

15.3 PENGGUNAAN PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 2

- Menentukan **persamaan gerak pegas** (dengan atau tanpa *redaman*)
- Menentukan **persamaan muatan dan arus** pada *rangkaian listrik R-L-C*

Pegas Bergetar/Berosilasi

Diketahui sebuah **pegas** digantung secara vertikal, dan dibebani suatu objek A [Gbr (a)]. Pegas tsb ditarik sejauh y_0 satuan di bawah titik kesetimbangannya [Gbr (b)], lalu dilepas dgn kecepatan awal v_0. Maka pegas akan *berosilasi*.



Pegas Bergetar/Berosilasi

Jika gesekan dengan udara diabaikan, maka menurut **Hukum Hooke**, gaya F yang cenderung mengembalikan titik ujung pegas (P) ke titik kesetimbangannya (0) akan sebanding dengan simpangannya, yakni

$$F = -ky,$$

dengan $k > 0$ konstanta pegas dan y menyatakan **simpangan pegas** (jarak P dari 0).

Dalam hal ini, y merupakan fungsi dari waktu (t).

Pegas Bergetar/Berosilasi

Menurut **Hukum II Newton**, $F = ma = (w/g)a$, dengan m = massa objek A, w = *berat* objek A, a = *percepatan* titik P, dan g = konstanta per-cepatan akibat *gravitasi*. Jadi

$$\frac{w}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = -ky.$$

Solusinya, $y = y(t)$, harus memenuhi syarat awal

$$y(0) = y_0 \text{ dan } y'(0) = v_0.$$

Pegas Bergetar/Berosilasi

Jika kita misalkan $B^2 = k.g/w = k/m$, maka PDB tadi menjadi

$$\frac{d^2y}{dt^2} + B^2 y = 0.$$

Solusi umum PDB ini adalah

$$y = C_1 \cos Bt + C_2 \sin Bt.$$

Jika $y(0) = y_0$ dan $y'(0) = 0$, maka $C_1 = y_0$ dan $C_2 = 0$, sehingga solusinya adalah

$$y = y_0 \cos Bt.$$

Dalam hal ini pegas berosilasi dgn amplitudo y_0 dan periode $2\pi/B$ (tidak kembali ke posisi setimbang).

Pegas Berosilasi Teredam

Jika pegas mengalami **gesekan** sebanding dgn kecepatan dy/dt, maka persamaan gerak pegas tsb menjadi

$$\frac{w}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - q\frac{dy}{dt},$$

yang dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{d^2y}{dt^2} + E\frac{dy}{dt} + B^2y = 0,$$

dengan $E = q/m$ dan $B^2 = k/m$.

Pegas Berosilasi Teredam

Persamaan karakteristik PDB tsb adalah

$$r^2 + Er + B^2 = 0,$$

yang memiliki akar

$$r_{1,2} = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4B^2}}{2}.$$

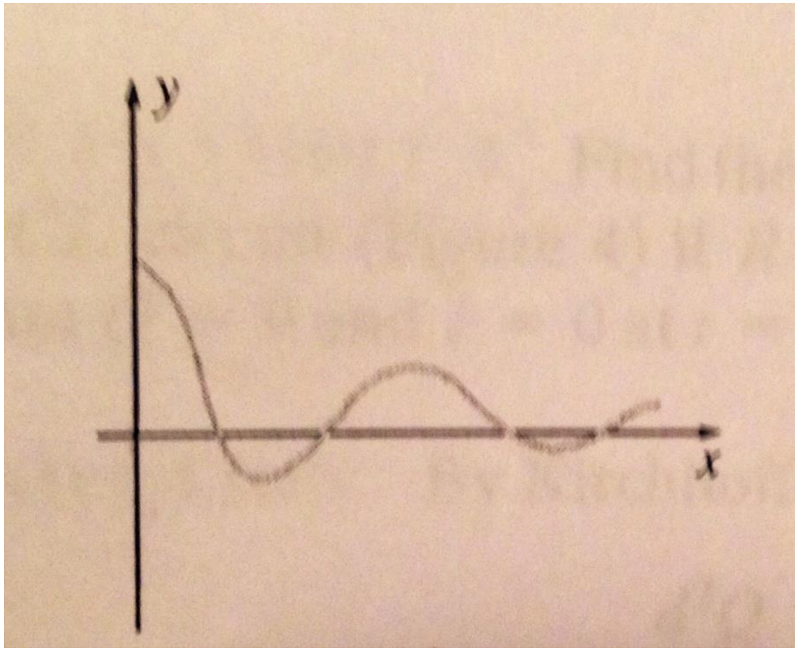
Dalam hal ini kita harus meninjau **3 kasus**, yang terkait dengan nilai $E^2 - 4B^2$; apakah ia **positif**, **nol**, atau **negatif**.

Kasus 1: $E^2 - 4B^2 < 0$

Dalam kasus ini, persamaan karakteristik mempunyai **2 akar kompleks**, $r_{1,2} = -\alpha \pm \beta i$, dan solusi umum PDB-nya adalah

$$y = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t).$$

Perhatikan bahwa $y \to 0$ bila $t \to \infty$.

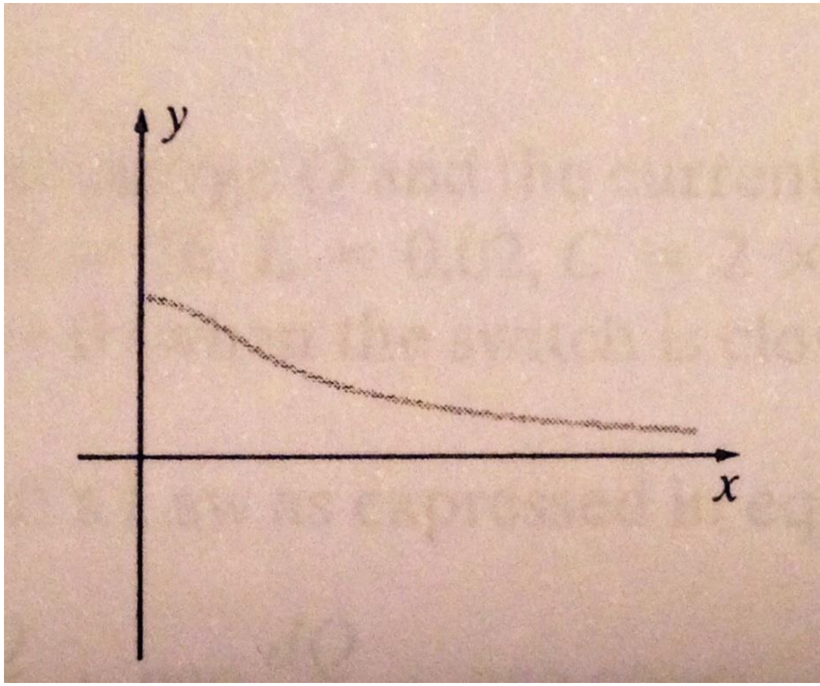


Kasus 2: $E^2 - 4B^2 = 0$

Dalam kasus ini, persamaan karakteristik mempunyai **1 akar real kembar**, $r_{1,2} = -\alpha$, dengan $\alpha = E/2$, dan solusi umum PDB-nya adalah

$$y = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 t e^{-\alpha t}.$$

Di sini pegas mengalami **redaman kritis**.

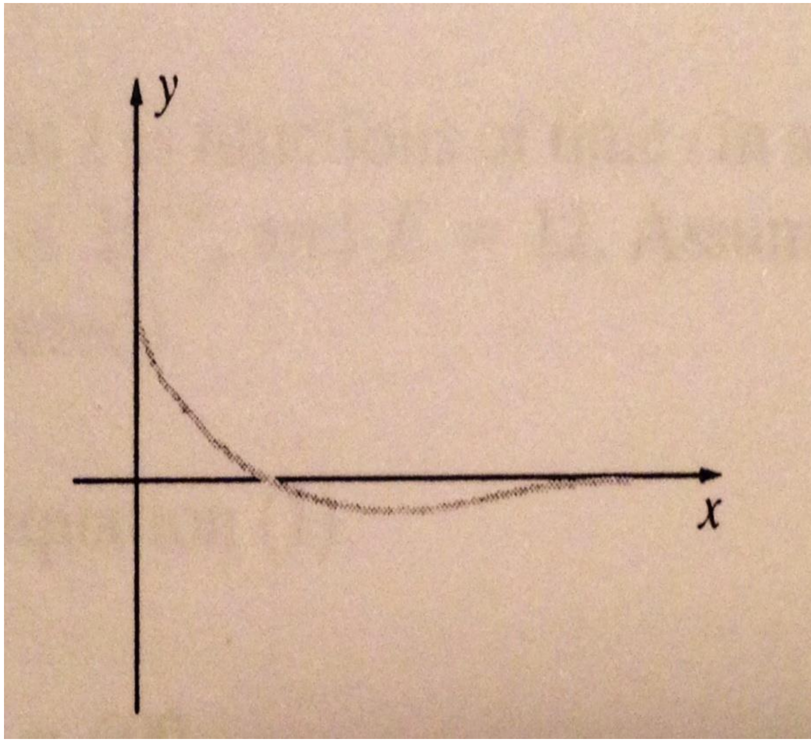


Kasus 3: $E^2 - 4B^2 > 0$

Dalam kasus ini, persamaan karakteristik mempunyai **2 akar real berbeda**, $r_1 = -\alpha_1$ dan $r_2 = -\alpha_2$ (dua-duanya bernilai negatif; mengapa?), dan solusi umum PDB-nya adalah

$$y = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}.$$

Pegas mengalami **redaman berlebih**!



Contoh/Latihan

Sebuah pegas dengan konstanta pegas $k = 10$ digantung dengan beban bermassa $m = 2,5$ (satuan k dan m telah disesuaikan).

Jika beban tsb ditarik ke bawah sejauh 5 cm dari posisi setimbang dan kemudian dilepaskan, tentukan simpangan pegas tsb setiap saat, apabila

(a) pegas **tidak** mengalami gesekan;

(b) pegas mengalami gesekan dengan faktor redaman $q = 0,2$.

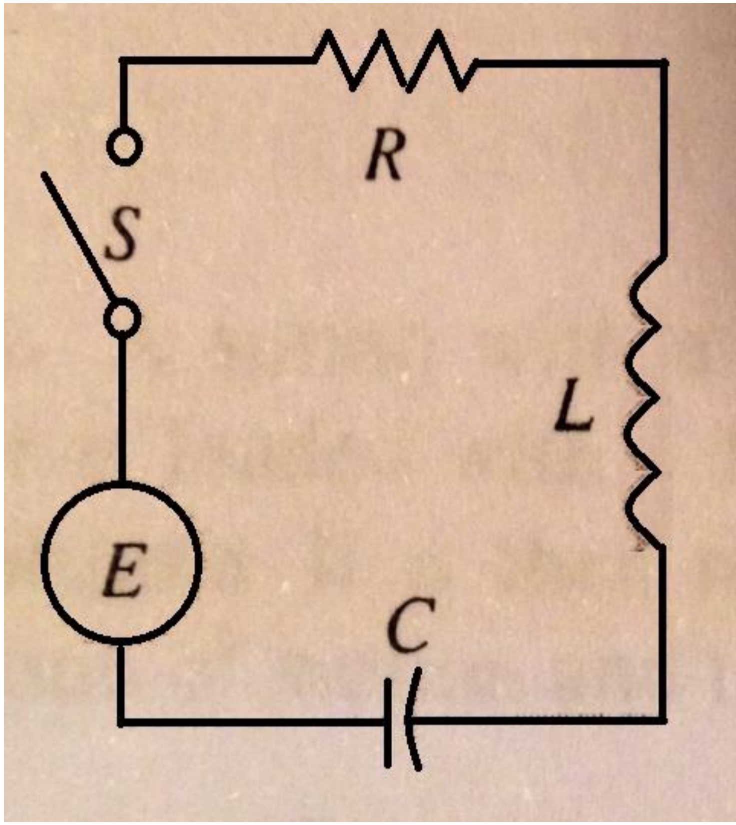
Rangkaian Listrik R-L-C

PDB orde 2 juga muncul pada **rangkaian listrik R-L-C**. Berdasarkan Hukum Kirchhoff, **muatan** Q pada kapasitor akan memenuhi PDB

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E(t).$$

Sementara itu, **arus** *I* = dQ/dt, memenuhi PDB

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E'(t).$$



Contoh/Latihan

Diketahui rangkaian listrik R-L-C dengan $R = 16$, $L = 0.02$, $C = 2 \times 10^{-4}$, dan $E = 20$ (satuan telah disesuaikan). Tentukan **muatan** dan **arus** pada rangkaian tersebut, sebagai fungsi dari waktu.

Asumsikan bhw $Q = 0$ dan $I = 0$ pada saat $t = 0$.

Bye!

Sampai Jumpa!

Selamat Belajar.

Semoga Sukses!

dan..

Jaga Kesehatan!