

MATEMATIKA DI BALIK PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG

Hendra Gunawan

KELOMPOK KEILMUAN ANALISIS DAN GEOMETRI
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

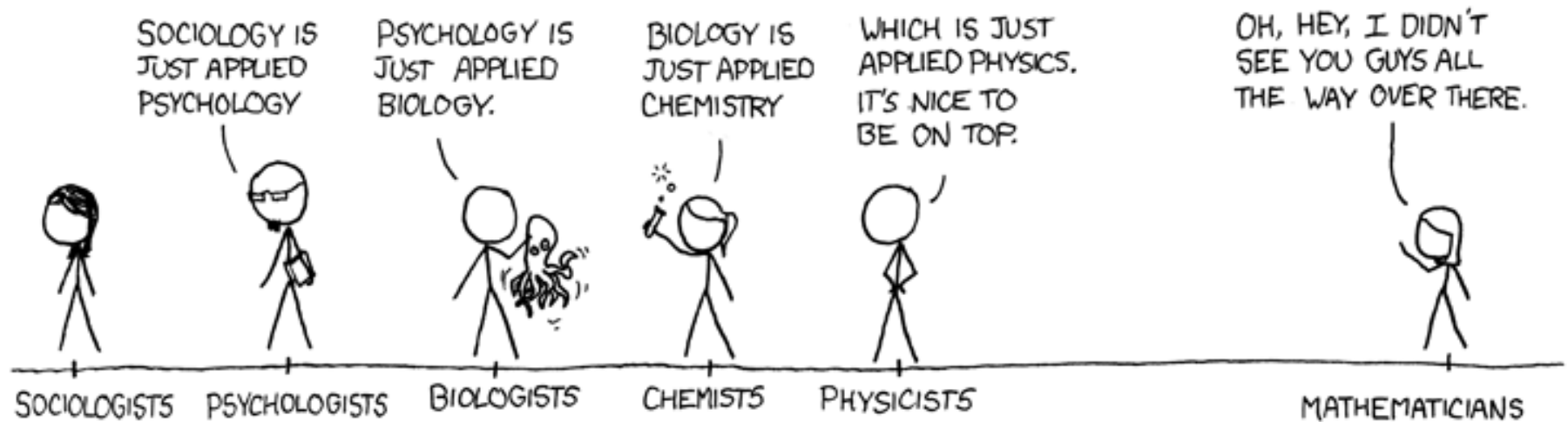
7 SEPTEMBER 2019

www.fmipa.itb.ac.id

Jalan Ganesa 10 Bandung, 40132, Indonesia

0. PROLOG

FIELDS ARRANGED BY PURITY
→
MORE PURE



Sumber gambar: xkcd.com (dikelola oleh Randall Munroe)

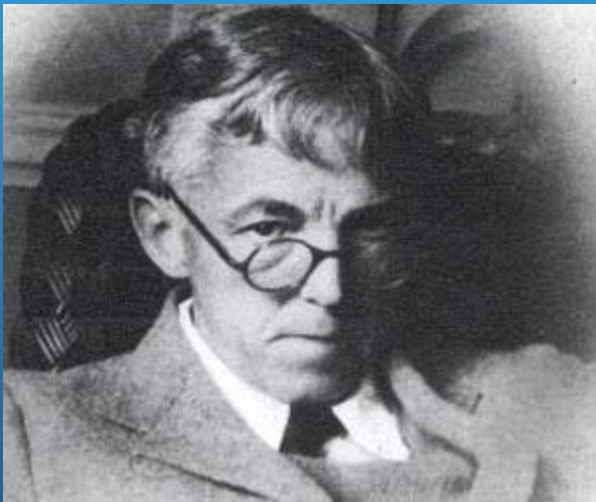
7 SEPTEMBER 2019



FMIPA

Seri Kuliah Umum

0. PROLOG

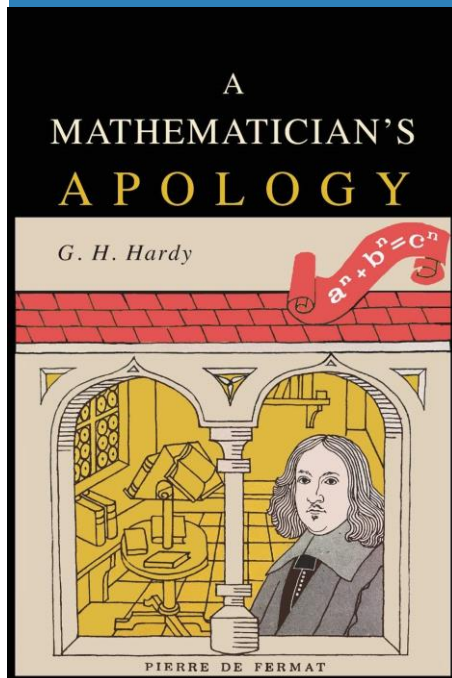


G.H. Hardy (1877-1947)

A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas.

CUPLIKAN DARI G.H. HARDY “A Mathematician’s Apology”

“The mathematician is in much more direct contact with **reality**. This may seem a paradox, since it is the physicist who deals with the subject-matter usually described as ‘**real**’ ...



A mathematician, on the other hand, is working with his own **mathematical reality**. ... Mathematical objects are so much more what they seem. ...

317 is a prime, not because we think so, or because our minds are shaped in one way rather than another, but because it is so; because mathematical reality is built that way.”

1. PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG

Intuisi & Interpretasi

Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

pertama kali dicetuskan oleh **Werner Heisenberg** pada tahun 1927, dan dibuktikan secara matematis oleh **W. Pauli** dan **H. Weyl** pada tahun 1928.

Heisenberg adalah seorang fisikawan teori, perintis utama **mekanika kuantum**.

Ia mendapat **Hadiah Nobel** dalam bidang Fisika pada tahun 1932 "*for the creation of quantum mechanics*".



Sumber gambar : Wikipedia

Werner Heisenberg (1901-1976)

**"It is
impossible
to know
precisely
where an
electron is
and what
path it
follows."**



Sumber: Wikipedia

Sumber
gambar:
Wikipedia

7 SEPTEMBER 2019



FMIPA

Seri Kuliah Umum



Wolfgang Pauli (1900-1958)



Hermann Weyl (1885-1955)

Sumber gambar : Wikipedia

Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Jika $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, maka

$$(\Delta_a f)(\Delta_\tau \hat{f}) \geq \frac{1}{4}$$

untuk setiap $a, \tau \in \mathbb{R}$.

Di sini

$$\Delta_a f := \frac{\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx}$$

menyatakan **dispersi** f di sekitar a .

Interpretasi

$\Delta_a f$ mengukur seberapa banyak f tersebar menjauhi a . Jika f terkumpul di dekat a , maka faktor $(x - a)^2$ akan membuat pembilang pada $\Delta_a f$ lebih kecil daripada penyebutnya, sehingga nilai $\Delta_a f$ akan lebih kecil daripada 1.

Prinsip Ketidakpastian Heisenberg menyatakan bahwa $\Delta_a f$ dan $\Delta_\tau \hat{f}$ tidak mungkin kecil dua-duanya.

Bila salah satu lebih kecil daripada $\frac{1}{2}$, maka yang lainnya mesti lebih besar daripada $\frac{1}{2}$.

Semakin kecil $\Delta_a f$, semakin besar $\Delta_\tau \hat{f}$; dan sebaliknya.

Interpretasi

Dalam mekanika kuantum, $f(x)$ menyatakan fungsi gelombang dari sebuah partikel (misal elektron) yang bergerak sepanjang sumbu- x , dengan $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$.

$|f(x)|^2$ menyatakan densitas peluang bahwa partikel berada di **posisi** x .

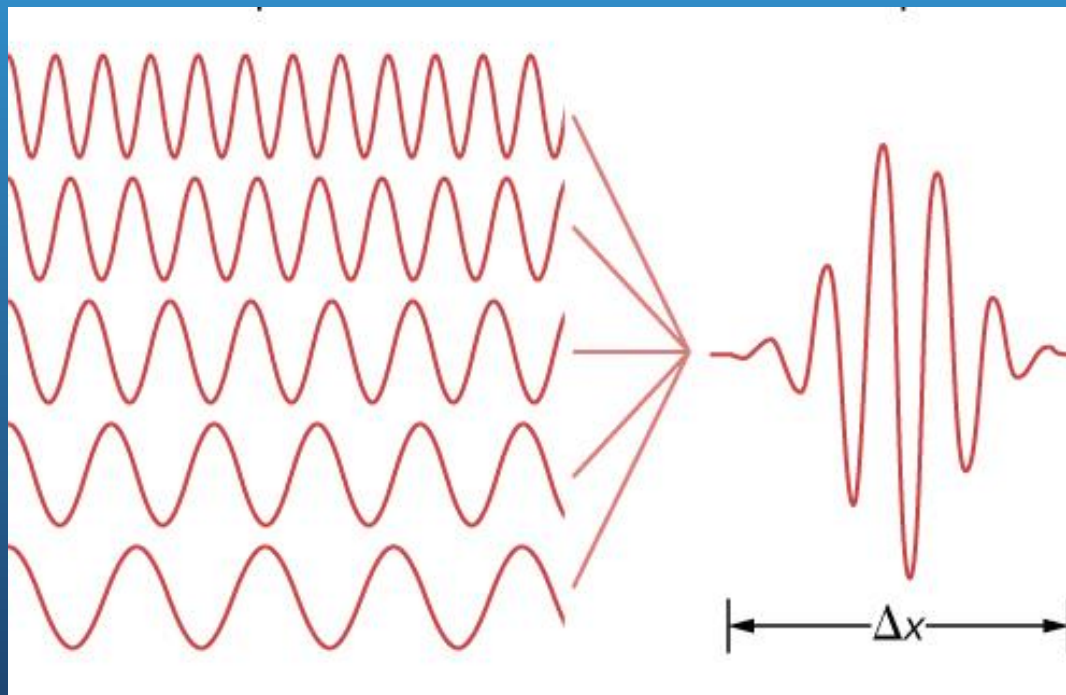
Transformasi Fourier dari f terkait dengan densitas peluang untuk **momen partikel**. Persisnya, jika

$$\tilde{f}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \hat{f}\left(\frac{\rho}{\hbar}\right), \text{ maka } \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\rho)|^2 d\rho = 1.$$

Prinsip Ketidakpastian Heisenberg: $(\Delta_a f)(\Delta_\tau \tilde{f}) \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

Implikasi

Akibatnya, dalam mekanika kuantum, posisi dan kecepatan suatu partikel tidak dapat ditentukan secara persis dalam waktu yang bersamaan.



Sumber gambar : Hyperphysics

Ilustrasi



<https://madartlab.com/heisenberg-uncertainty-principle-and-hummingbirds/>



FMIPA

7 SEPTEMBER 2019

Seri Kuliah Umum

Ilustrasi



<https://madartlab.com/heisenberg-uncertainty-principle-and-hummingbirds/>



FMIPA

2.

MATEMATIKA DI BALIK PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG

Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Jika $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, maka

$$(\Delta_a f)(\Delta_\tau \hat{f}) \geq \frac{1}{4}$$

untuk setiap $a, \tau \in \mathbb{R}$.

Di sini

$$\Delta_a f := \frac{\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx}$$

menyatakan **dispersi** f di sekitar a .

Transformasi Fourier

Transformasi Fourier:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Kesamaan Plancherel:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

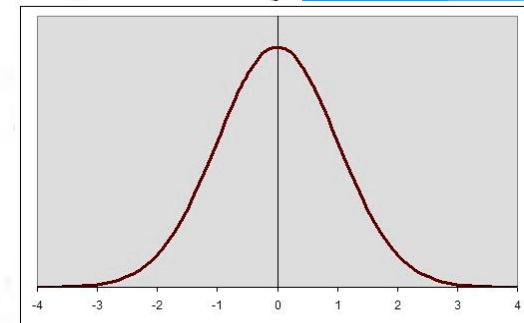
Menggunakan notasi **norma** di **ruang** $L^2(\mathbb{R})$:

$$\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2.$$

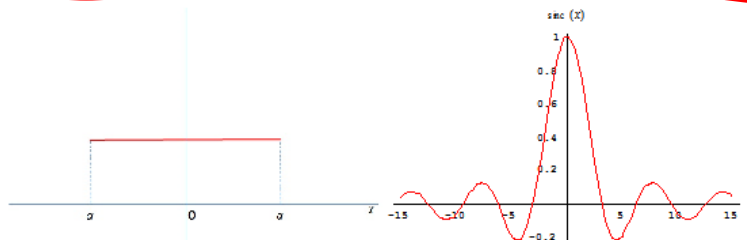
TABLE 2. SOME BASIC FOURIER TRANSFORMS

Functions are listed on the left, their Fourier transforms on the right. a and c denote constants with $a > 0$ and $c \in \mathbb{R}$.

1.	$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$
2.	$f(x - c)$	$e^{-ic\xi} \hat{f}(\xi)$
3.	$e^{icx} f(x)$	$\hat{f}(\xi - c)$
4.	$f(ax)$	$a^{-1} \hat{f}(a^{-1}\xi)$
5.	$f'(x)$	$i\xi \hat{f}(\xi)$
6.	$xf(x)$	$i(\hat{f})'(\xi)$
7.	$(f * g)(x)$	$\hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$
8.	$f(x)g(x)$	$(2\pi)^{-1} (\hat{f} * \hat{g})(\xi)$
9.	$e^{-ax^2/2}$	$\sqrt{2\pi/a} e^{-\xi^2/2a}$
10.	$(x^2 + a^2)^{-1}$	$(\pi/a) e^{-a \xi }$
11.	$e^{-a x }$	$2a(\xi^2 + a^2)^{-1}$
12.	$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & (x < a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$	$2\xi^{-1} \sin a\xi$
13.	$x^{-1} \sin ax$	$\pi \chi_a(\xi) = \begin{cases} \pi & (\xi < a) \\ 0 & (\xi > a) \end{cases}$



Ketaksamaan Heisenberg mencapai kesamaan ketika $f(x) = ce^{-kx^2/2}$.



Sumber: G.B. Folland

Ruang $L^2(\mathbb{R})$ dan Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Ruang $L^2(\mathbb{R})$:

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ j. h. j. } \|f\|_2 := \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Jika f dan $g \in L^2(\mathbb{R})$, maka

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Prinsip Ketidakpastian Heisenberg: Kasus $a = 0$ dan $\alpha = 0$

Jika $f \in L^2(\mathbb{R})$, maka ketaksamaan Heisenberg menjadi

$$\left[\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \right] \left[\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right] \geq \frac{1}{4} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right] \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right].$$

Mengingat $\widehat{f'(x)} = i\xi \hat{f}(\xi)$ dan $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$, maka

$$\left[\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \right] \left[\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right] \geq \frac{1}{4} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right]^2$$

atau

$$\|xf(x)\|_2^2 \|f'(x)\|_2^2 \geq \frac{1}{4} \|f\|_2^4.$$

Prinsip Ketidakpastian Heisenberg: Kasus $a = 0$ dan $\tau = 0$

Jika $xf(x) \notin L^2(\mathbb{R})$ atau $f'(x) \notin L^2(\mathbb{R})$, maka ruas kiri pada ketaksamaan Heisenberg bernilai tak terhingga, sehingga ketaksamaan jelas berlaku.

Jika $xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ dan $f'(x) \in L^2(\mathbb{R})$, maka dengan **pengintegralan parsial** kita mempunyai

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = -2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \overline{xf(x)} f'(x) dx.$$

Berdasarkan ketaksamaan Cauchy-Schwarz, kita peroleh

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq 2 \left[\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

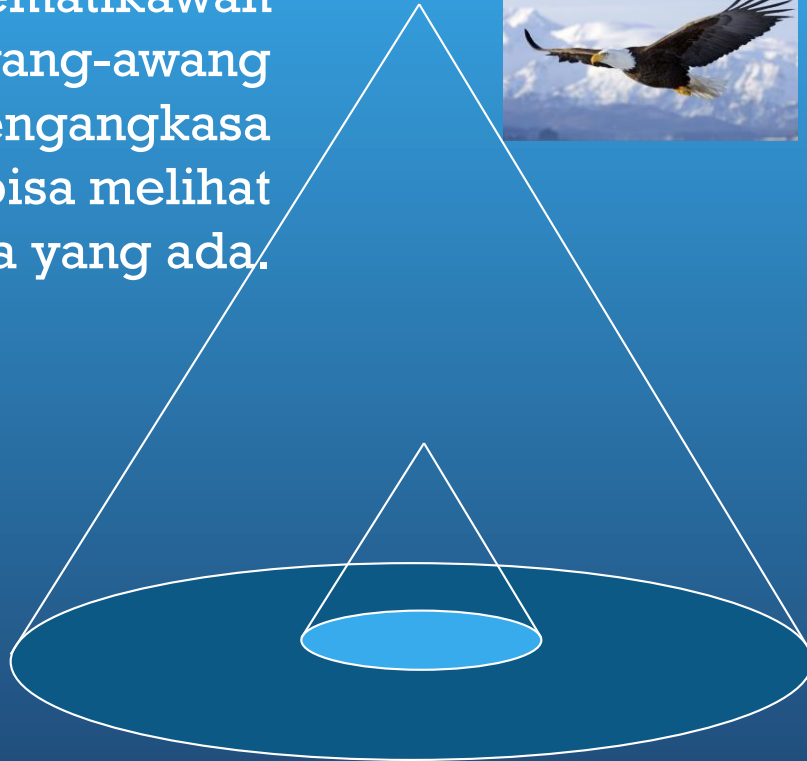
Ketaksamaan Heisenberg diperoleh dengan menguadratkan kedua ruas ketaksamaan ini.

3.

PERUMUMAN PRINSIP KETIDAKPASTIAN HEISENBERG

An Eagle's View

Matematikawan
mengawang-awang
atau mengangkasa
untuk bisa melihat
pola yang ada.



Perumuman Ketaksamaan Heisenberg di $L^2(\mathbb{R}^n)$

Ketaksamaan Heisenberg yang lebih umum di $L^2(\mathbb{R}^n)$ ditemukan oleh **W. Beckner** pada tahun 1995:

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \right]^2 \leq C(n, \alpha) \left[\int_{\mathbb{R}^n} ||x|^\alpha f(x)|^2 dx \right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| D^{\frac{\alpha}{2}} f(x) \right|^2 dx \right]$$

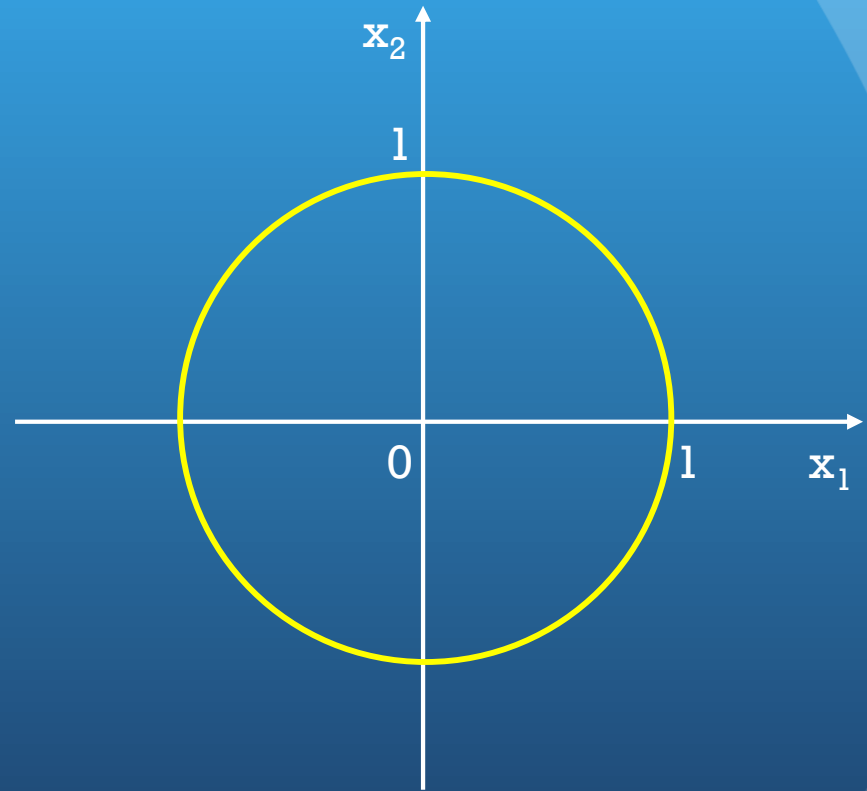
dengan $D^{\frac{\alpha}{2}} = (-\Delta)^{\alpha/2}$ menyatakan **operator turunan fraksional**, yang didefinisikan via

$$\widehat{D^{\frac{\alpha}{2}} f}(\xi) = |\xi|^\alpha \hat{f}(\xi)$$

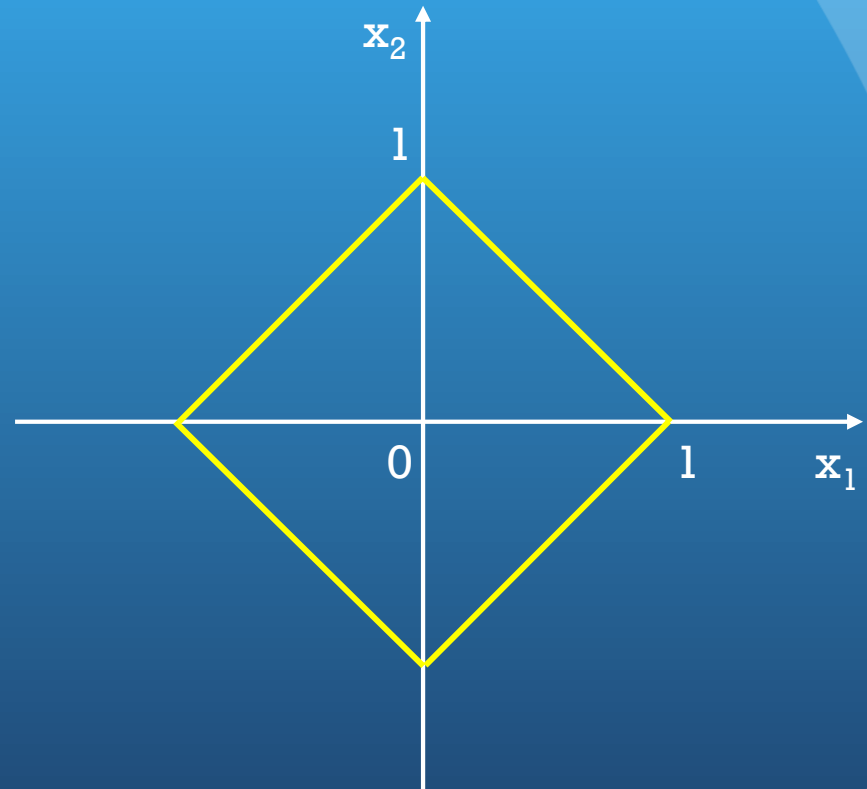
untuk $0 < \alpha < n$.

Ketaksamaan Heisenberg sebelumnya merupakan kasus khusus $\alpha = 1$.

Ada Banyak Alat Ukur Tersedia



Ada Banyak Alat Ukur Tersedia



Ruang $L^p(\mathbb{R})$ dan Ketaksamaan Hölder

Ruang $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$:

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \text{ j. h. j. } \|f\|_p := \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Jika $f \in L^p(\mathbb{R})$ dan $g \in L^q(\mathbb{R})$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, maka

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q$$

Perumuman Ketaksamaan Heisenberg di $L^p(\mathbb{R}^n)$

Ketaksamaan Heisenberg yang lebih umum di $L^2(\mathbb{R}^n)$ dapat dituliskan dalam notasi norma sebagai:

$$\|f\|_2^2 \leq C(n, \alpha) \| |\cdot|^\alpha f \|_2 \| \|D^{\frac{\alpha}{2}} f\|_2,$$

dengan $0 < \alpha < n$.

Perumumannya di $L^p(\mathbb{R}^n)$ diperoleh oleh Beckner pada tahun 2008:

$$\|f\|_p \leq C \| |\cdot|^\beta f \|_q^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} \| \|D^{\frac{\gamma}{2}} f\|_r^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}},$$

dengan $\beta > 0, 0 < \gamma < \frac{n}{r}, p > 1, q \geq 1, r > 1, \frac{\beta+\gamma}{p} = \frac{\gamma}{q} + \frac{\beta}{r}$.

Perumuman Ketaksamaan Heisenberg di $L^p(\mathbb{R}^n)$

Hasil Beckner diperumum lebih lanjut oleh **P. Ciatti**, **M. Cowling**, dan **F. Ricci** pada tahun 2015:

$$\|f\|_p \leq C \left\| |\cdot|^\beta f \right\|_q^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} \left\| D^{\frac{\gamma}{2}} f \right\|_r^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}},$$

dengan $\beta, \gamma > 0, p > 1, q \geq 1, r > 1, \frac{\beta+\gamma}{p} = \frac{\gamma}{q} + \frac{\beta}{r}$.

Bila sebelumnya $0 < \gamma < \frac{n}{r}$, sekarang $\gamma > 0$ tanpa batas atas.

P. Ciatti, M. Cowling, and F. Ricci, Hardy and uncertainty inequalities on stratified Lie groups, Adv. Math. 277 (2015)



THE HARDY AND HEISENBERG INEQUALITIES IN MORREY SPACES

HENDRA GUNAWAN[✉], DENNY IVANAL HAKIM, EIICHI NAKAI
and YOSHIHIRO SAWANO

(Received 25 September 2017; accepted 12 December 2017)

Abstract

We use the Morrey norm estimate for the imaginary power of the Laplacian to prove an interpolation inequality for the fractional power of the Laplacian on Morrey spaces. We then prove a Hardy-type inequality and use it together with the interpolation inequality to obtain a Heisenberg-type inequality in Morrey spaces.

2010 *Mathematics subject classification*: primary 42B20; secondary 42B35.

Keywords and phrases: imaginary power of Laplace operators, fractional power of Laplace operators, interpolation inequality, Hardy's inequality, Heisenberg's inequality, Morrey spaces.

1. Introduction

Inspired by the work of Ciatti *et al.* [1], we are interested in obtaining an estimate for the Morrey norm of the fractional power of the Laplacian, in order to prove Heisenberg's uncertainty inequality in Morrey spaces. Let $(-\Delta)^{z/2}$ be the complex power of the Laplacian, given by

$$[(-\Delta)^{z/2} f](\xi) := |\xi|^z \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

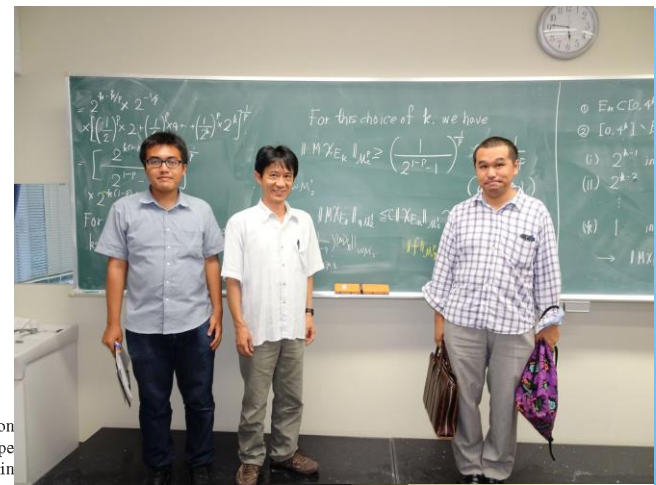
for suitable functions f on $\mathbb{R}^n$, where the Fourier transform is defined by

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Theorem 3.6. *Let $1 < p_1 \leq q_1 < \infty$, $1 \leq p_2 \leq q_2 < \infty$, and $\beta, \delta > 0$. If $\frac{\beta+\delta}{p_0} = \frac{\beta}{p_1} + \frac{\delta}{p_2}$ and $\frac{\beta+\delta}{q_0} = \frac{\beta}{q_1} + \frac{\delta}{q_2}$, then*

$$\|g\|_{\mathcal{M}_{q_0}^{p_0}} \lesssim \| |\cdot|^\beta g \|_{\mathcal{M}_{q_2}^{p_2}}^{\delta/(\beta+\delta)} \| (-\Delta)^{\delta/2} g \|_{\mathcal{M}_{q_1}^{p_1}}^{\beta/(\beta+\delta)}$$

for every $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.



4. EPILOG

FIELDS ARRANGED BY PURITY

→
MORE PURE

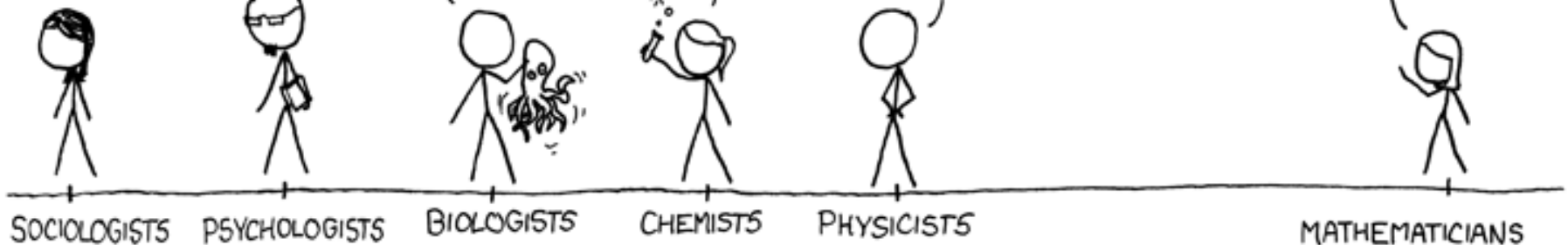
SOCIOLOGY IS
JUST APPLIED
PSYCHOLOGY

PSYCHOLOGY IS
JUST APPLIED
BIOLOGY.

BIOLOGY IS
JUST APPLIED
CHEMISTRY

WHICH IS JUST
APPLIED PHYSICS.
IT'S NICE TO
BE ON TOP.

OH, HEY, I DIDN'T
SEE YOU GUYS ALL
THE WAY OVER THERE.

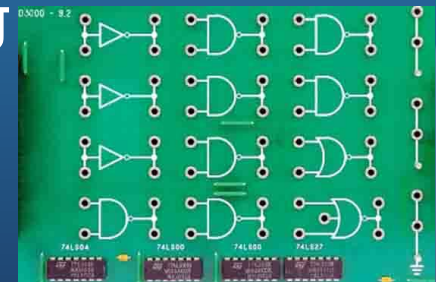


4. EPILOG

Apa aplikasi dari ketaksamaan Heisenberg di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$, apalagi di ruang Morrey? Entahlah. Bukan tugas saya untuk menemukan aplikasinya.

Tak sedikit penemuan matematika yang aplikasinya diketahui puluhan bahkan ratusan tahun kemudian (oleh orang lain, tentunya).

Contoh pertama adalah **aljabar Boole** yang dikembangkan oleh **George Boole** pada 1847, yang aplikasi pertamanya dalam rangkaian saklar listrik disadari oleh **Charles S. Peirce** pada tahun 1886.



fromreadingtable.com



FMIPA

4. EPILOG

Contoh kedua adalah masalah matematika murni “*Sum of Squares*” yang dikemukakan oleh **David Hilbert** pada tahun 1900: apakah setiap polinom tak negatif dapat dinyatakan sebagai jumlah dari beberapa fungsi rasional kuadrat, misalnya

$$5x^2 + 24x + 29 = (x + 2)^2 + (2x + 5)^2.$$

Masalah ini baru terjawab pada tahun 1927 oleh **Emil Artin**, dan baru pada tahun 2017 yang lalu ditemukan aplikasinya dalam teknologi *drone* dan kendaraan tanpa pengemudi, oleh **Amir Ali Ahmadi** dan **Anirudha Majumdar**.

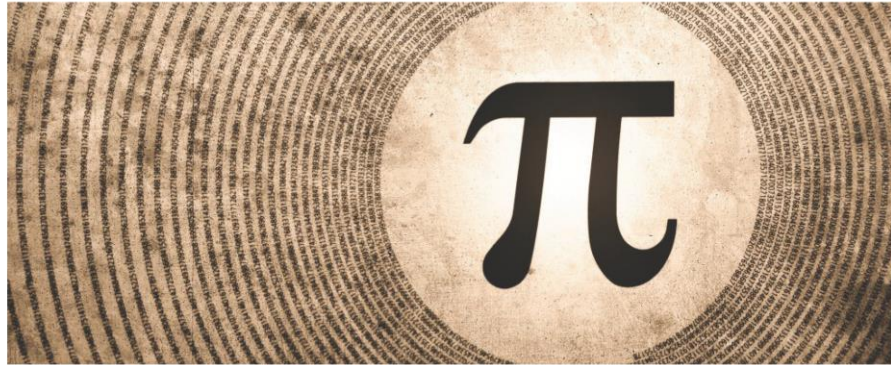


4. EPILOG

Contoh ketiga
adalah **Rumus
Wallis** untuk
bilangan Pi
yang ditemukan
pada tahun
1655; baru-baru
ini diketahui
aplikasinya
dalam fisika
kuantum.

9/4/2019

A Classic Formula For Pi Has Been Discovered Hidden in Hydrogen Atoms



PHYSICS

A Classic Formula For Pi Was Discovered Hidden in Hydrogen Atoms

FIONA MACDONALD 10 MAR 2018

Back in 2015, scientists found something amazing for the first time - a classic formula for pi hidden in the world of quantum physics.

Pi is the ratio between a circle's circumference and its diameter, and is incredibly important in pure mathematics. But this was the first time scientists had found it "lurking" in the world of physics, when using quantum mechanics to compare the energy levels of a hydrogen atom.

Why was that exciting? Well, it revealed an incredibly special and previously unknown connection between quantum physics and maths.

"I find it fascinating that a purely mathematical formula from the 17th century characterises a physical system that was discovered 300 years later," said one of the lead researchers at the time, Tamar Friedmann, a mathematician at the University of Rochester in the US.

The discovery was made when Carl Hagen, a particle physicist at the University of Rochester, was teaching a class on quantum mechanics and explaining to his students how to use a quantum mechanical

<https://www.sciencealert.com/formula-for-pi-has-been-discovered-hidden-in-hydrogen-atoms>

The Wallis Formula For Pi

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \dots$$

1/3

*Matematika menawarkan solusi untuk masa depan,
termasuk untuk masalah yang belum muncul saat ini.*

**TERIMA KASIH
ATAS PERHATIANNYA.**

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$