

MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2019/2020

22 November 2019

Sasaran Kuliah Hari Ini

6.7 Fungsi Hiperbolik dan Inversnya

- Menentukan turunan **fungsi hiperbolik** dan inversnya.

6.8 Persamaan Diferensial Linear Orde 1

- Menyelesaikan **persamaan diferensial linear orde 1** dan permasalahan yang relevan.

MA1101 MATEMATIKA 1A

6.7 FUNGSI HIPERBOLIK & INVERSnya

- Menentukan turunan fungsi hiperbolik dan inversnya.

Fungsi Hiperbolik & Invers-nya

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

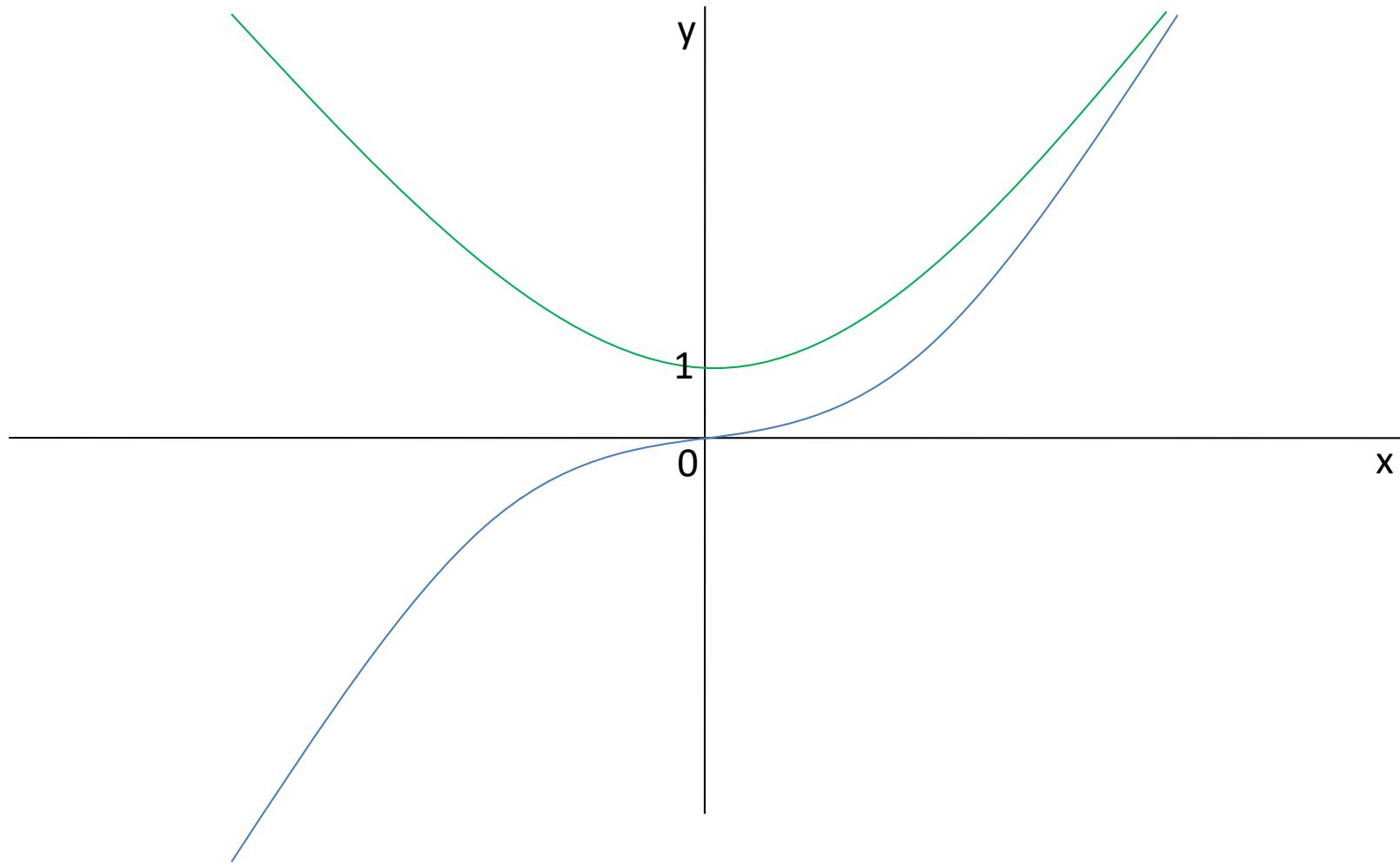
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{sech} x = 1/\cosh x$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{csch} x = 1/\sinh x$$

Grafik Fungsi $y = \sinh x$ dan $y = \cosh x$



Kesamaan Hiperbolik

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Bukti:

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x.$$

Bukti:

Turunan Fungsi Hiperbolik

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$\frac{d}{dx} \tanh x = ?$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sech} x = ?$$

Menentukan Invers dari $y = \sinh x$

$y = \sinh x$ monoton naik, jadi mempunyai invers.

$$x = \sinh^{-1} y \text{ j.h.j. } y = \sinh x.$$

Dapat dibuktikan bahwa $\sinh^{-1} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

sbb: $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^x - 2y - e^{-x} = 0$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2y(e^x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Invers dari Fungsi Hiperbolik

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = ?$$

Turunan dari Invers Fungsi Hiperbolik

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in \mathfrak{R}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$$

Buktinya?

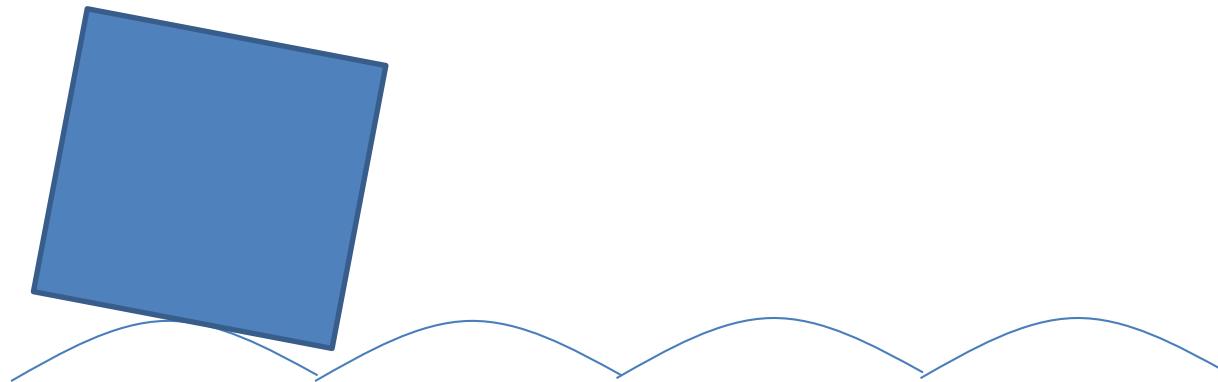
Latihan

Tentukan dy/dx bila:

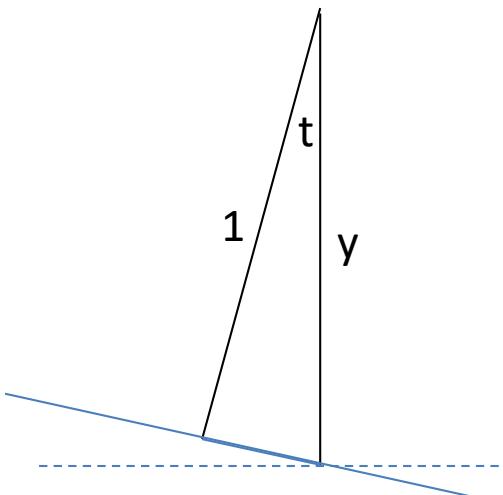
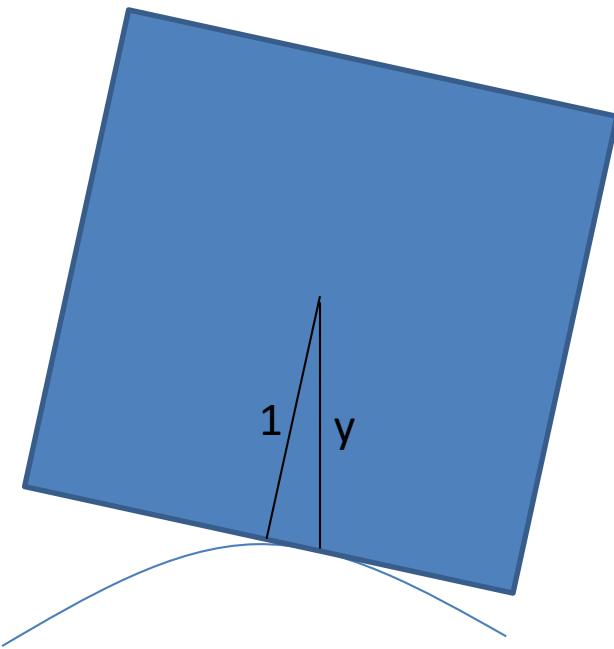
1. $y = \tanh^{-1} x.$
2. $y = \operatorname{sech}^{-1} x.$

Sepeda Beroda Persegi

Pernahkah anda melihat **sepeda beroda persegi**? Bagaimana sepeda tsb bergerak di atas jalan yang rata? Ia akan bergerak **naik-turun**, ya 'kan? Nah, bila kita menghendaki sepeda tsb bergerak mendatar **tidak** naik-turun, maka jalannya harus dibuat khusus.. **Tapi seperti apa?**



Sepeda Beroda Persegi



$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 1}$$

MA1101 MATEMATIKA 1A

6.8 PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE 1

- Menyelesaikan persamaan diferensial linear orde 1 dan permasalahan yang relevan.

Persamaan Diferensial Orde 1

Kita telah berhadapan dengan persamaan diferensial orde 1 yang sederhana, yang dapat diselesaikan dengan **metode pemisahan peubah**. Sebagai contoh:

- | | |
|------------------|------------------------------|
| 1. $dy/dt = ky$ | 3. $dT/dt = k(T - T_1)$ |
| 2. $dy/dx = x/y$ | 4. $dy/dx = (y^2 - 1)^{1/2}$ |

Bagaimana dengan persamaan diferensial ini:

- | | |
|--------------------|-----------------------------|
| 5. $dy/dx + y = x$ | 6. $y' + y \tan x = \sec x$ |
|--------------------|-----------------------------|

Persamaan Diferensial Linear Orde 1

Persamaan diferensial orde 1 yang berbentuk

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (*)$$

disebut **persamaan diferensial linear orde 1**.

Persamaan bentuk ini dapat diselesaikan dengan mencari terlebih dahulu **faktor pengintegral-nya**, yaitu $F(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Kalikan kedua ruas dengan $F(x)$, persamaan (*) menjadi

$$F(x)y' + F(x)P(x)y = F(x)Q(x).$$

Perhatikan bahwa ruas kiri merupakan turunan dari $F(x)y$; sehingga persamaan di atas menjadi

$$(F(x)y)' = F(x)Q(x).$$

Integralkan kedua ruas, kita peroleh

$$F(x)y = \int F(x)Q(x) dx.$$

Jadi

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int F(x)Q(x) dx.$$

Contoh

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$y' + xy = x.$$

Jawab: Faktor pengintegralnya adalah $e^{\int x \, dx} = \exp(\frac{1}{2}x^2)$.
Jadi kita kalikan kedua ruas dengan faktor ini,

$$e^{\frac{1}{2}x^2} y' + e^{\frac{1}{2}x^2} xy = e^{\frac{1}{2}x^2} x$$

$$\frac{d}{dx}(e^{\frac{1}{2}x^2} y) = e^{\frac{1}{2}x^2} x$$

$$e^{\frac{1}{2}x^2} y = \int e^{\frac{1}{2}x^2} x \, dx = e^{\frac{1}{2}x^2} + C$$

$$y = 1 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Latihan

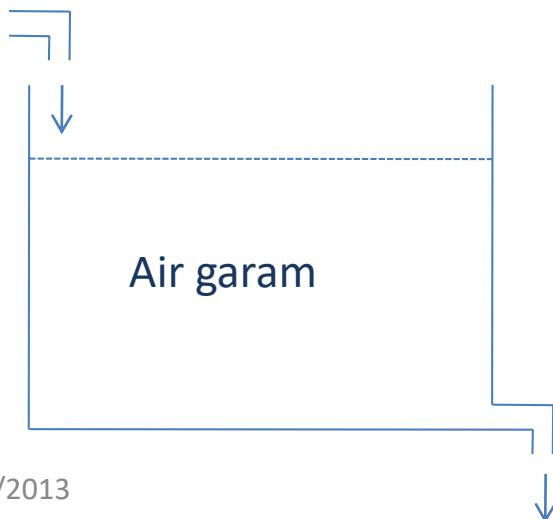
Selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$y' + y \tan x = \sec x.$$

Jawab: Faktor pengintegralnya adalah $e^{\int \tan x \, dx} = \dots$
Kalikan kedua ruas dengan faktor tsb, ...

Aplikasi PD Linear Orde 1

Bila tanki dialiri air garam dan pada saat yang sama larutan mengalir ke luar dari tanki tsb, berapakah kadar garam pada larutan tsb setelah sekian lama?



Diketahui: volume awal tanki = **120 liter** air garam, dengan kandungan **75 gram** garam.

Air yang mengandung **1,2 gram** garam **per liter** mengalir masuk ke dalam tanki dgn laju **2 liter/menit**.

Air yang teraduk rata keluar dari tanki dengan laju yang **sama**.

Jawab:

Misalkan $y = y(t)$ menyatakan banyaknya garam yang terkandung dalam tanki setelah t menit.

Maka

$$\frac{dy}{dt} = 2,4 - \frac{y}{60} \quad (\text{garam.masuk} - \text{garam.keluar})$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{60} = 2,4$$

Solusinya adalah $y = 144 + Ce^{-\frac{1}{60}t}$.

Pada $t = 0$, $y = 75$; jadi $C = -69$, sehingga

$$y = 144 - 69e^{-\frac{1}{60}t}.$$

Latihan

Rangkaian listrik $R-L$ dengan sumber tenaga $E(t)$ akan dialiri arus $I = I(t)$, yang memenuhi persamaan diferensial

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

dengan L = induktansi (henry) dan R = resistansi (ohm).

Selesaikan PD ini, jika $L = 1 \text{ H}$, $R = 10^6 \Omega$, dan $E(t) = 1 \text{ V}$.

