MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2019/2020

8 November 2019

Sasaran Kuliah Hari Ini

5.5 Momen dan Pusat Massa

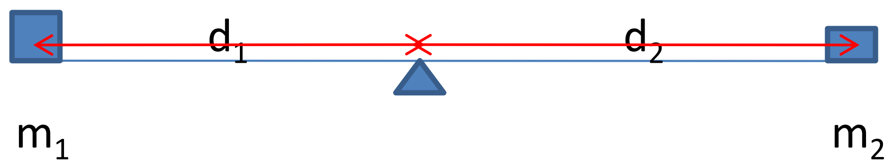
- Menghitung momen dan menentukan pusat massa dari suatu distribusi massa pada garis dan bidang.
- Menggunakan Teorema Pappus untuk menghitung volume benda putar (yang diperoleh dengan memutar suatu daerah yang diketahui pusat massanya terhadap suatu sumbu putar).

MA1101 MATEMATIKA 1A

5.5 MOMEN DAN PUSAT MASSA

- Menghitung momen dan menentukan pusat massa pada garis dan bidang.
- Menggunakan Teorema Pappus untuk meng-hitung volume benda putar.

Distribusi Massa Diskrit pada Garis



Jungkit di atas seimbang bila $d_1m_1 = d_2m_2$ ... (*).

Bila kita letakkan jungkit tsb pada garis bilangan real sehingga titik tumpunya berimpit dengan 0, maka persamaan (*) menjadi:

$$x_1m_1 + x_2m_2 = 0 \qquad \text{... (\#).}$$

Hasil kali massa dari suatu partikel dan jaraknya (berarah) dari suatu titik acuan disebut **momen** partikel terhadap titik acuan tsb.

Persamaan (#) menyatakan bahwa **momen total** terhadap titik tumpunya sama dengan 0.

Momen

Situasi tadi dapat diperumum sbb. Sistem massa $m_1, \ldots, m_n$ yang tersebar di posisi $x_1, \ldots, x_n$ pada garis bilangan real mempunyai momen (total)

$$M = \sum_i x_i m_i.$$

Sistem tsb akan seimbang di titik tumpunya (yang berimpit dengan 0) bila $M = 0$.

Secara umum, suatu sistem massa akan seimbang di suatu titik, tidak harus di 0. Tetapi bagaimana mencari titik keseimbangan tsb?

Pusat Massa

Misalkan titik **pusat massa**-nya adalah x*. Maka, momen total terhadap x* haruslah sama dengan 0, yakni:

$$\sum_i (x_i - x^*)m_i = 0.$$

Dari sini kita dapatkan bahwa:

$$\sum_i x_i m_i = x^* \sum_i m_i,$$

sehingga mestilah

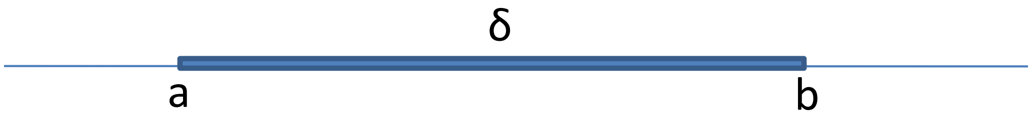
$$x^* = \sum_i x_i m_i / \sum_i m_i = M/m,$$

dengan M = momen total terhadap 0 dan

m = **massa total**.

Distribusi Massa Kontinu pada Garis

Sekarang misalkan kita mempunyai seutas kawat lurus yang menempati selang $[a, b]$ pada garis bilangan real.

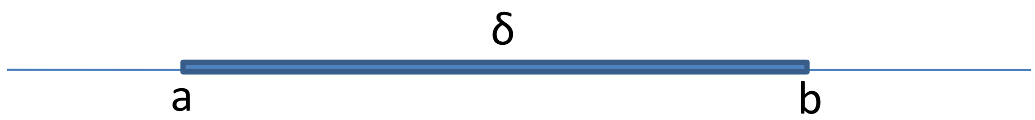


Bila rapat massanya (δ) konstan, maka massa kawat tsb mudah dihitung – kita hanya perlu mengalikan rapat massa kawat tsb dengan panjangnya: $m = \delta(b - a)$.

Bagaimana bila rapat massanya tidak konstan?

Distribusi Massa Kontinu pada Garis

Bila rapat massanya tidak konstan, $\delta = \delta(x)$, maka kita perlu meng**integral**kannya:



Massa irisan: $\Delta m \approx \delta(x)\Delta x$.

Momen irisan (thd 0): $\Delta M \approx x\,\delta(x)\Delta x$.

Jadi, massa kawat: $m = \int_a^b \delta(x)\,dx.$

dan momen (thd 0): $M = \int_a^b x\delta(x)\,dx.$

Pusat Massa

Jadi, pusat massa kawat tsb terletak di

$$x^* = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}.$$

Contoh

Diketahui kawat sepanjang 25 cm mempunyai rapat massa $\delta(x) = \sqrt{x}$ (gr/cm), dengan x = jarak dari titik ujung kiri kawat tsb. Tentukan massa dan pusat massa kawat tsb.

Jawab: Misal titik ujung kiri = 0 . Massa kawat tsb adalah

$$m = \int_0^{25} \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^{25} = \frac{250}{3} gr.$$

Momen kawat tsb terhadap 0 adalah

$$M = \int_0^{25} x\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{5} x^2\sqrt{x} \Big|_0^{25} = 1250 gr.cm.$$

Contoh (berlanjut)

Jadi pusat massanya ada di

$$x^* = \frac{M}{m} = \frac{1250}{250/3} = 15cm$$

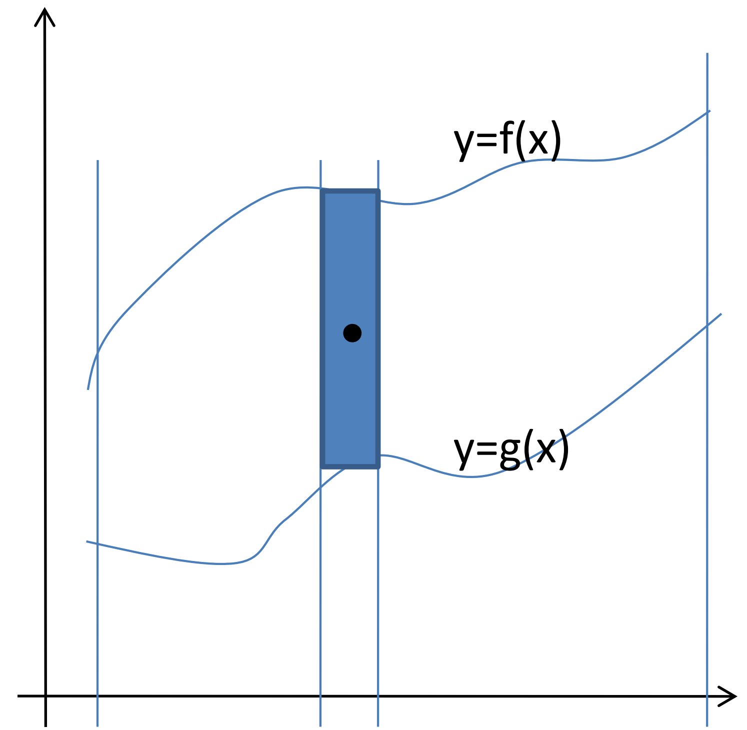
dari titik ujung kiri kawat tsb.

Latihan

Diketahui kawat sepanjang 10 cm mempunyai rapat massa $\delta(x) = x$ (gr/cm), dengan x = jarak dari titik ujung kiri kawat tsb. Tentukan massa dan pusat massa kawat tsb.

Distribusi Massa (Kontinu) pada Bidang

Misal kita mempunyai sebuah **lamina** (keping datar) dengan rapat massa δ konstan, yang menempati daerah pada bidang yang dibatasi oleh garis $x = a$ dan $x = b$ serta kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) \geq g(x)$ pada $[a, b]$.



$\Delta m \approx \delta[f(x) - g(x)].\Delta x$

$\Delta M_y \approx \delta x[f(x) - g(x)].\Delta x$

$\Delta M_x \approx ½\delta[f(x)^2 - g(x)^2].\Delta x$

Momen dan Pusat Massa Lamina

Dari taksiran irisan tadi, kita peroleh

Massa: $$m = \delta \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Momen thd sb-y: $$M_y = \delta \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$$

Momen thd sb-x: $$M_x = \frac{\delta}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$$

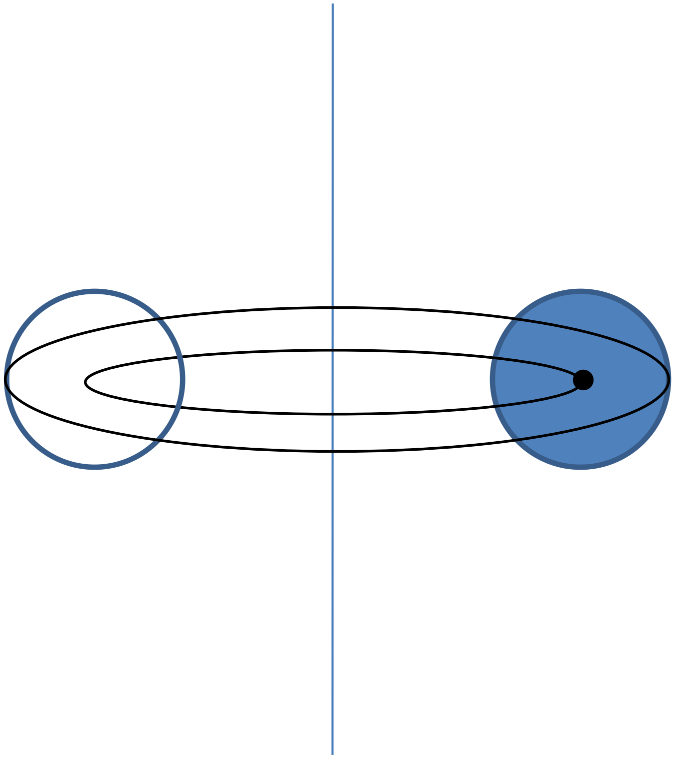
Pusat massa: $$x^* = \frac{M_y}{m}; y^* = \frac{M_x}{m}.$$

Contoh

Tentukan pusat massa lamina yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu-x, dan garis $x = 4$. [Gambar terlebih dahulu daerah lamina tsb.]

Teorema Pappus

Jika suatu daerah R pada bidang diputar mengelilingi sebuah garis pada bidang tsb yang tidak memotong R, maka volume benda putar yang terbentuk sama dengan luas daerah R kali keliling lingkaran yang ditempuh oleh pusat massa R.



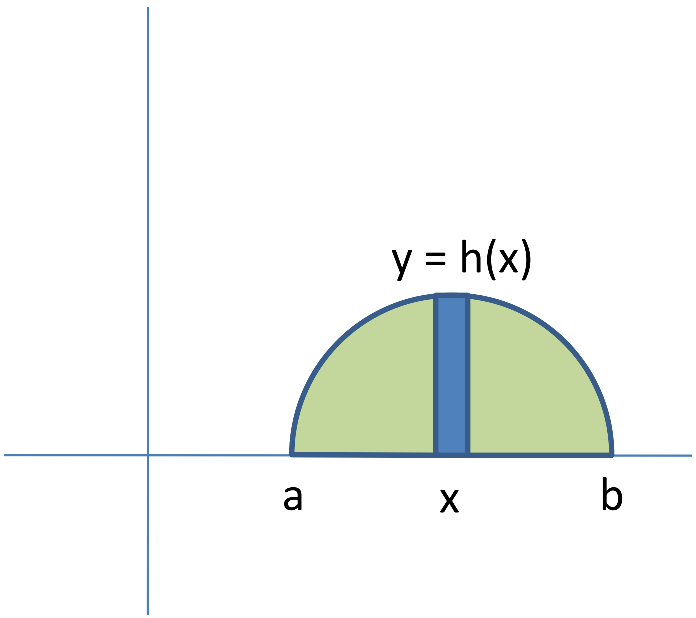
Mengapa Teorema Pappus Berlaku

Perhatikan gambar di bawah. Dengan metode kulit tabung, kita peroleh:

$$V = 2\pi \int_a^b xh(x)dx$$

$$x^* = \frac{\int_a^b xh(x)dx}{\int_a^b h(x)dx}$$

$$V = 2\pi x^* \int_a^b h(x)dx.$$



Contoh

Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu-x, dan garis $x = 4$ diputar mengelilingi garis $y = 3$. Tentukan volume bendar putar yang terbentuk.

Latihan

1. Tentukan pusat massa lamina yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$.
2. Menggunakan Teorema Pappus, tentukan volume benda putar yang terbentuk bila daerah pada Soal 1 diputar mengelilingi garis $y = -x$.