MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2019/2020

3 Oktober 2019

Latihan (Kuliah yang Lalu)

Dengan memperhatikan:

- daerah asal dan daerah hasilnya,
- titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
- asimtot (bila ada),
- kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
- kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada),

gambarlah grafik fungsi berikut:

1. $f(x) = x + 1/x$
2. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}.$
3. $h(x) = x - 2 \sin x$

Catatan

Dalam menggambar grafik fungsi, informasi tentang apakah fungsi tersebut merupakan fungsi **genap** atau **ganjil** juga merupakan informasi penting yang membantu kita.

Sebagai contoh, fungsi pada soal latihan no. 1 merupakan fungsi ganjil; jadi grafiknya **simetris** terhadap **titik asal**.

Sasaran Kuliah Hari Ini

3.6 Teorema Nilai Rata-Rata

Menentukan nilai rata-rata dari suatu fungsi yang diberikan; menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata untuk memecahkan masalah yang relevan.

MA1101 MATEMATIKA 1A

3.6 TEOREMA NILAI RATA-RATA

Menentukan nilai rata-rata dari suatu fungsi yang diberikan; menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata untuk memecahkan masalah yang relevan.

Jangan Berbohong. Nanti Ketahuan!

Pak Djono mengatakan bahwa dengan mobil baru yang dikendarainya ia telah menempuh 183 km dalam 3 jam tanpa pernah melampaui 60 km/jam.

Ah, ia telah *berbohong!*

Tetapi bagaimana kita dapat membuktikannya?

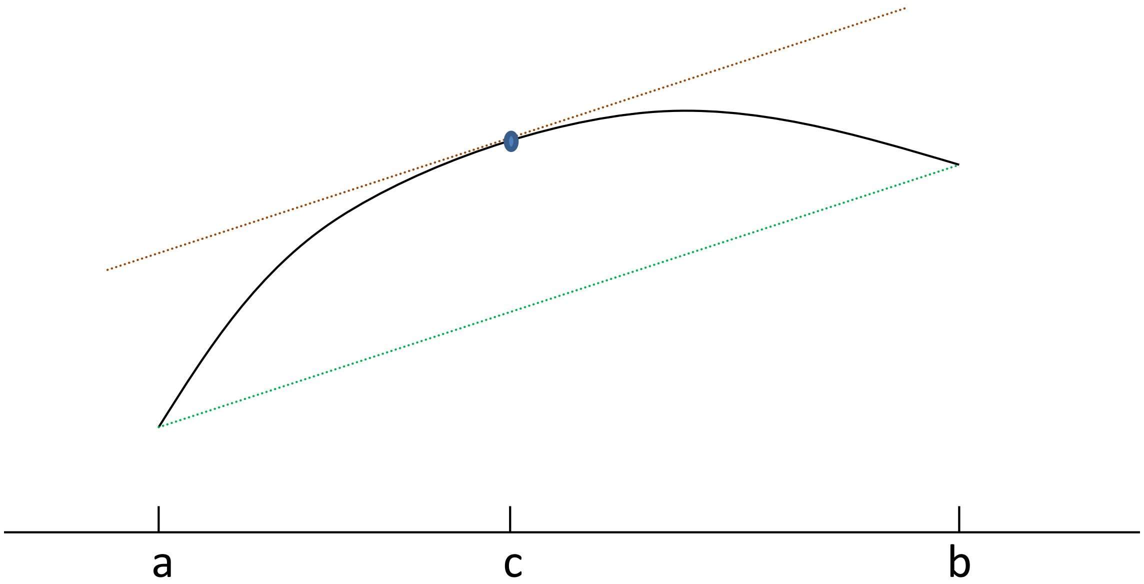
Teorema Nilai Rata-Rata

Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan mempunyai turunan pada (a,b), maka terdapat suatu $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

<u>Catatan</u>. $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ disebut **nilai rata-rata** f pada $[a,b]$. Secara fisis, bayangkan **kecepatan rata-rata** pada suatu selang waktu!

Ilustrasi: Teorema Nilai Rata-Rata



f’(c) = gradien garis singgung di c,
[f(b) – f(a)]/(b – a) = gradien ruas garis yang menghubungkan (a,f(a)) dan (b,f(b)).

Penjelasan Teorema Nilai Rata-Rata

Asumsikan $f(a) = f(b)$. Teorema Nilai Rata-Rata menjamin adanya $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f'(c) = 0$. Dari mana kita mengetahuinya?

Asumsikan f tidak konstan. [Bila f konstan, $f'(c) = 0$ di setiap titik $c \in (a, b)$.] Menurut Teorema Eksistensi Nilai Ekstrim, f mestilah mencapai nilai ekstrim di suatu titik $c \in (a, b)$. Nah, titik c bukan titik ujung selang, bukan pula titik singular.

Menurut Teorema Titik Kritis, c mestilah merupakan titik stasioner, yakni $f'(c) = 0$.

Kebohongan Pak Djono

Untuk membuktikan bahwa Pak Djono bohong, misalkan $f(t)$ menyatakan jarak yang ditempuh dalam t jam. Maka f kontinu dan turunannya, $f'(t)$, menyatakan kecepatan pada saat t.

Menurut Teorema Nilai Rata-rata, mestilah terdapat $t_1 \in (0, 3)$ sedemikian sehingga

$$f'(t_1) = [f(3) - f(0)]/(3 - 0) = 61.$$

Ini berarti bahwa Pak Djono pernah memacu mobilnya dengan kecepatan di atas 60 km/jam.

Contoh 1

Diketahui $f(x) := x^2$, $x \in [0,1]$. Hitung nilai rata-rata f pada $[0,1]$ dan tentukan $c \in (0,1)$ sedemikian sehingga $f'(c)$ sama dengan nilai rata-rata f pada $[0,1]$.

<u>Jawab</u>: Nilai rata-rata f pada $[0,1]$ adalah

$$[f(1) - f(0)]/(1 - 0) = 1.$$

Sementara itu $f'(x) = 2x = 1$ jika dan hanya jika $x = ½$.

Jadi, $c = ½$ adalah bilangan yang kita cari.

Contoh 2

Buktikan ketaksamaan

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

untuk setiap $x, y \in \mathbf{R}$.

Latihan

1. Diketahui $g(x) := x^3/3$, $x \in [-1,1]$. Hitung nilai rata-rata g pada $[-1,1]$ dan tentukan $c \in (-1,1)$ sedemikian sehingga $g'(c)$ sama dengan nilai rata-rata g pada $[-1,1]$.
2. Buktikan jika $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, maka $f(x)$ bernilai konstan pada selang (a,b).

Apa yang Telah Dipelajari pada Bab 3 (hingga pagi ini)

3.1 Maksimum dan Minimum

3.2 Kemonotonan dan Kecekungan

3.3 Maksimum dan Minimum Lokal

3.4 Masalah Maksimum dan Minimum

3.5 Menggambar Grafik Fungsi

3.6 Teorema Nilai Rata-Rata (untuk Turunan)