MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2019/2020

2 Oktober 2019

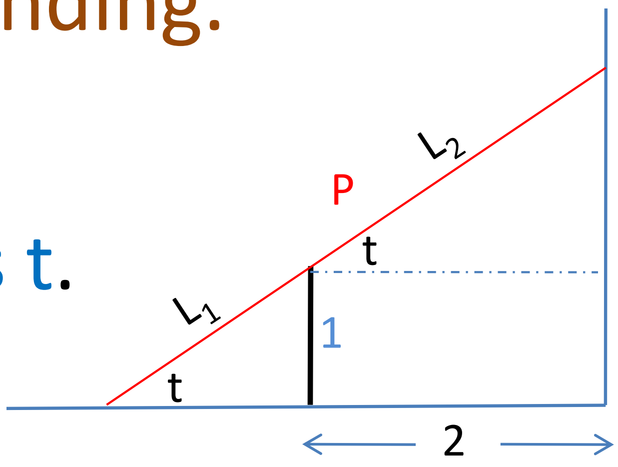
KULIAH SEBELUMNYA

MA1101 MATEMATIKA 1A

3.4 MASALAH MAKSIMUM & MINIMUM

Memecahkan masalah maksimum dan minimum.

Contoh 3. Tentukan panjang tangga terpendek yg menghubungkan lantai ke dinding.



<u>Jawab</u>: Panjang tangga $P = L_1 + L_2$
dengan $L_1 = 1/\sin t$ dan $L_2 = 2/\cos t$.

Jadi, $P = 1/\sin t + 2/\cos t$.

Turunannya adalah

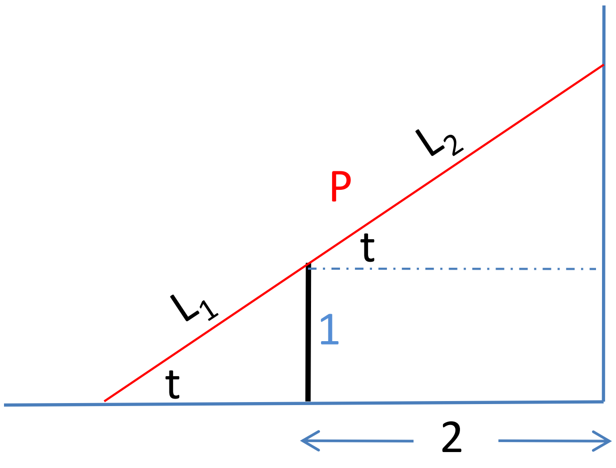
$dP/dt = -\cos t/\sin^2 t + 2\sin t/\cos^2 t$,

sehingga

$dP/dt = 0$ j.h.j. $\cos t/\sin^2 t = 2\sin t/\cos^2 t$

atau $\tan^3 t = ½$.

Jawab (lanjutan):



Jadi titik stasionernya adalah

$$t = \text{arc tan}\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}67 \text{ rad.}$$

Turunan di sebelah kirinya negatif, dan di sebelah kanannya positif. Jadi, titik tersebut adalah titik minimum.

Dengan demikian panjang tangga terpendek adalah $P \approx 1/\sin(0{,}67) + 2/\cos(0{,}67) \approx 4{,}16$ meter.

Latihan

1. Tentukan titik pada hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$ yang terdekat ke titik $Q(5,0)$.
2. Sebuah pulau kecil berjarak 2 km dari titik terdekat P pada garis pantai sebuah pulau besar. Jika seseorang di pulau tersebut dapat mendayung perahunya dengan laju 3 km/jam dan berjalan kaki di pantai 4 km/jam, di mana ia harus berlabuh agar sampai di Q yang berjarak 5 km dari P dalam waktu yang paling singkat?

1. Tentukan titik pada hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$ yang terdekat ke titik $Q(5,0)$.

Jawab: Misal d := jarak dari titik (x,y) pada hiperbola tsb ke titik Q(5,0); maka

$$d^2 = (x-5)^2 + y^2 = (x-5)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot x^2 - 1, \quad x \geq 2.$$

Meminimumkan d sama saja dgn meminimumkan $s := d^2$. Cari titik stasionernya:

$$s'(x) = 2(x-5) + \tfrac{1}{2}\cdot x = 0 \leftrightarrow x = 4.$$

Selain itu ada titik ujung selang, yaitu $x = 2$. Tetapi $s'(x) < 0$ untuk $2 \leq x < 4$ dan $s'(x) > 0$ untuk $x > 4$.

Jadi menurut Uji Turunan Pertama, s mencapai minimum di $x = 4$. Cari ordinatnya: $y^2 = 3$, $y = \pm\sqrt{3}$. Jadi titik terdekat yg dicari adalah $(4,\sqrt{3})$ dan $(4,-\sqrt{3})$.

2. Sebuah pulau kecil berjarak 2 km dari titik terdekat P pada garis pantai. Seseorang akan mendayung perahu dari pulau tsb dengan laju 3 km/jam dan berjalan kaki di pantai 4 km/jam, menuju Q yang berjarak 5 km dari P.

Misal ia berlabuh di X (antara P dan Q). Maka total waktu yang dibutuhkan adalah

$T = T_{dayung} + T_{berjalan} = \ldots$

SUDAH DIKERJAKAN BELUM?

Sasaran Kuliah Hari Ini

3.4 Masalah Maksimum dan Minimum – Lanjutan

Memecahkan masalah maksimum dan minimum.

3.5 Menggambar Grafik Fungsi

Menggambar grafik fungsi secara cermat, dengan menggunakan kalkulus.

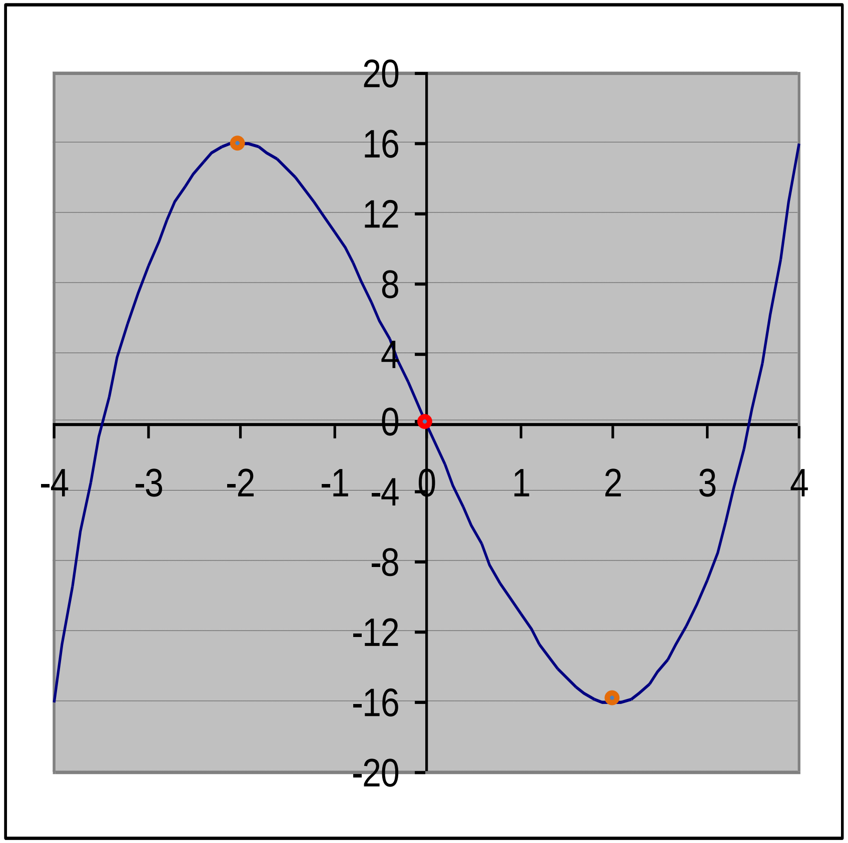
MA1101 MATEMATIKA 1A

3.5 MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI

Menggambar grafik fungsi secara cermat, dengan menggunakan kalkulus.

Menggambar Grafik Fungsi

Kita telah melihat bagaimana informasi tentang kemonotonan dan kecekungan dapat dipakai untuk menggambar grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$.



Berikut adalah beberapa contoh lainnya:

Contoh 1

Gambarlah grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$, dengan memperhatikan:

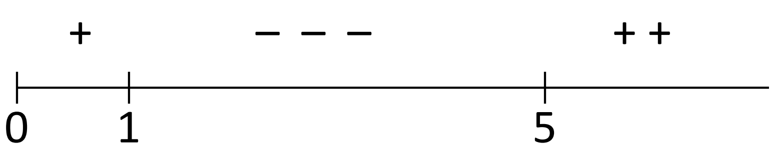
- daerah asal dan daerah hasilnya,
- titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
- asimtot datar dan asimtot tegak (bila ada),
- kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
- kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada).

Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$

Daerah asal f adalah $[0,\infty)$ dan daerah hasilnya juga $[0,\infty)$, sehingga grafiknya akan terletak di kuadran pertama. Titik potong dengan sumbu x adalah $x = 0$ dan $x = 5$, sedangkan titik potong dengan sumbu y adalah $y = 0$. Asimtot tidak ada. Untuk $x > 0$, turunan pertama f adalah

$$f'(x) = \frac{5(x-1)(x-5)}{2\sqrt{x}}.$$

Jadi, titik-titik stasionernya adalah $x = 1$ dan $x = 5$, dan tanda $f'(x)$ adalah



Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$

Jadi f naik pada $[0,1)$, turun pada $[1,5]$, dan naik pada $(5,\infty)$. Menurut Uji Turunan Pertama, $f(1) = 16$ merupakan nilai maksimum lokal, sedangkan $f(0) = f(5) = 0$ merupakan nilai minimum lokal (sekaligus *global*).

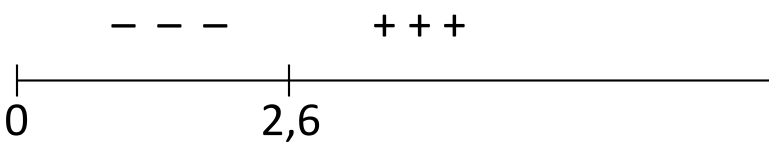
Selanjutnya kita hitung turunan keduanya:

$$f''(x) = \frac{5(3x^2 - 6x - 5)}{4x^{3/2}}.$$

Menggunakan rumus **akar persamaan kuadrat**, kita dapatkan $f''(x) = 0$ ketika $x = 1 + 2\sqrt{6}/3 \approx 2,6$.

Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$

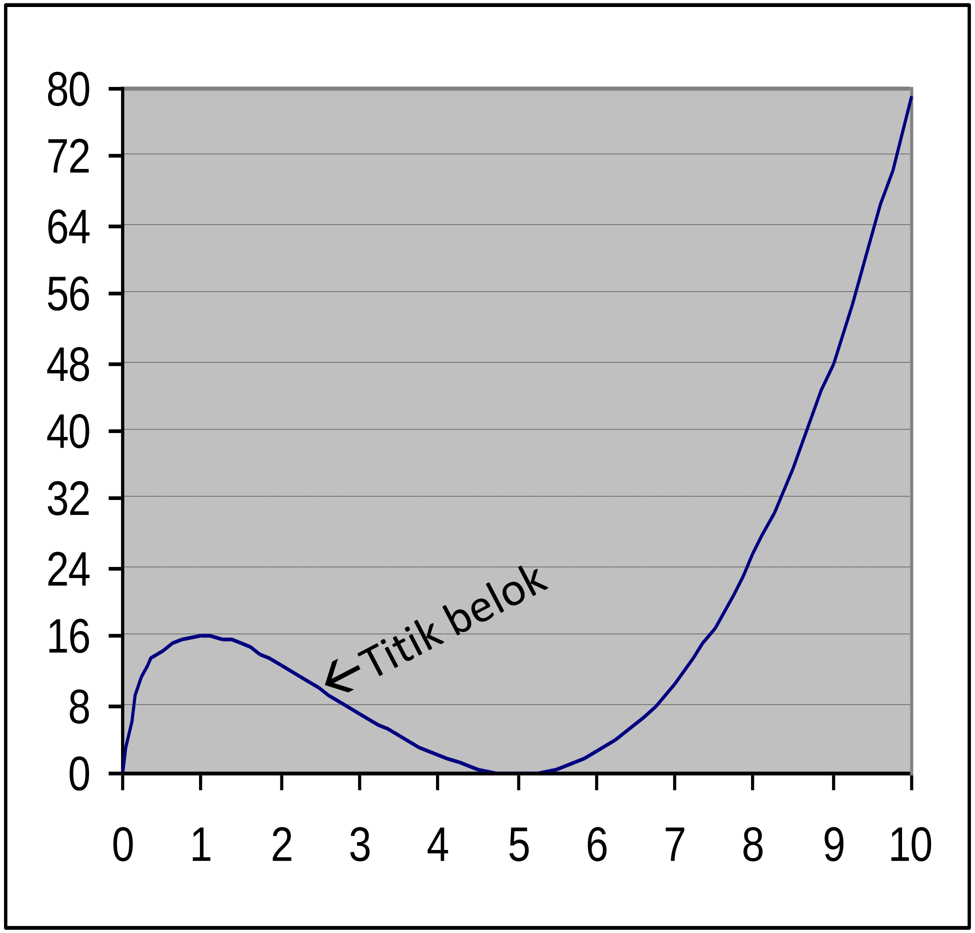
Periksa tanda $f''(x)$:



Jadi grafiknya cekung ke bawah di sebelah kiri 2,6; dan cekung ke atas di sebelah kanan 2,6. Jadi $(2{,}6\ ;\ f(2{,}6))$ merupakan titik belok.

Dengan semua informasi ini, kita dapat menggambar grafik fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$ sebagai berikut:

Grafik Fungsi $f(x) = \sqrt{x}.(x - 5)^2$



Contoh 2

Gambarlah grafik fungsi

$$g(x) = 50x - x^2/2, \quad \text{jika } 0 \le x \le 20,$$
$$ = 60x - x^2, \quad \text{jika } 20 < x \le 60,$$

dengan memperhatikan:

- daerah asal dan daerah hasilnya,
- titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
- asimtot datar dan asimtot tegak (bila ada),
- kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
- kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada).

Latihan

Dengan memperhatikan:

- daerah asal dan daerah hasilnya,
- titik-titik potong dengan sumbu koordinat,
- asimtot (bila ada),
- kemonotonan dan titik-titik ekstrim lokalnya,
- kecekungan dan titik-titik beloknya (bila ada),

gambarlah grafik fungsi berikut:

1. $f(x) = x + 1/x$.
2. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$.
3. $h(x) = x - 2 \sin x$.

Catatan

Dalam menggambar grafik fungsi, informasi tentang apakah fungsi tersebut merupakan fungsi **genap** atau **ganjil** juga merupakan informasi penting yang membantu kita.

Sebagai contoh, fungsi pada soal latihan no. 1 merupakan fungsi ganjil; jadi grafiknya **simetris** terhadap **titik asal**.