

MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2019/2020

25 September 2019

Kuliah Sebelumnya

3.1 Maksimum dan Minimum

Menentukan nilai **maksimum dan minimum** dari suatu fungsi yang diberikan.

3.2 Kemonotonan dan Kecekungan

Menentukan selang kemonotonan (dan titik ekstrim), serta selang kecekungan dan titik belok, dari suatu fungsi yang diberikan.

3.3 Maksimum dan Minimum Lokal

Menentukan nilai maksimum dan minimum lokal dari suatu fungsi yang diberikan.

Kuliah Hari Ini

3.1 Maksimum dan Minimum

Menentukan nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi yang diberikan.

3.2 Kemonotonan dan Kecekungan

Menentukan selang **kemonotonan** (dan titik ekstrim), serta selang **kecekungan** dan titik belok, dari suatu fungsi yang diberikan.

3.3 Maksimum dan Minimum Lokal

Menentukan nilai maksimum dan minimum lokal dari suatu fungsi yang diberikan.

3.2 KEMONOTONAN & KECEKUNGAN

Menentukan selang **kemonotonan** (dan titik ekstrim), serta selang **kecekungan** dan titik belok, dari suatu fungsi yang diberikan

Kemonotonan

Fungsi f dikatakan **naik** pada selang I apabila untuk setiap $x, y \in I$ dengan $x < y$ berlaku

$$f(x) < f(y).$$

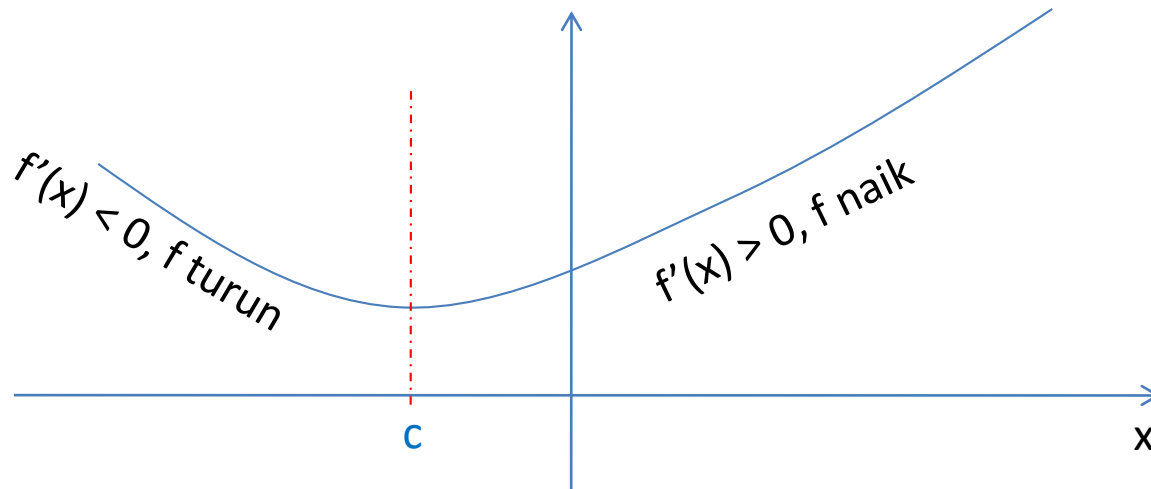
Fungsi f dikatakan **turun** pada selang I apabila untuk setiap $x, y \in I$ dengan $x < y$ berlaku

$$f(x) > f(y).$$

Fungsi naik atau turun pada selang I dikatakan **monoton** pada I .

Teorema Kemonotonan Fungsi

Misalkan f kontinu dan mempunyai turunan pada $I = (a,b)$. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f naik pada I . Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka f turun pada I .



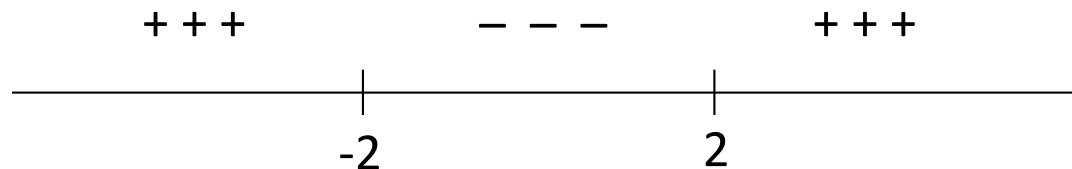
Catatan. Pada gambar di samping, titik c merupakan titik minimum.

Contoh 1

Diketahui $f(x) = x^3 - 12x$. Kita hitung turunannya:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2).$$

Periksa tanda $f'(x)$ pada garis bilangan real:



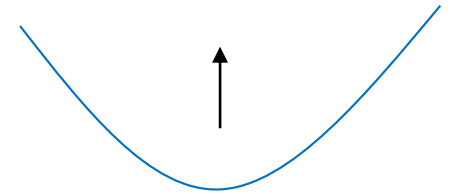
Menurut Teorema Kemonotonan, fungsi f naik pada $(-\infty, -2)$ dan juga pada $(2, \infty)$; dan f turun pada $(-2, 2)$.
[Ctt. $x = -2$ titik maks lokal, $x = 2$ titik min lokal $\rightarrow$ §3.4.]

Kecekungan

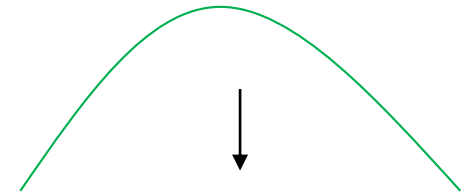
Misalkan f mempunyai turunan pada $I = (a,b)$.

Jika f' naik pada I , maka grafik fungsi f **cekung ke atas** pada I .

Jika f' turun pada I , maka grafik fungsi f **cekung ke bawah** pada I .



cekung ke atas

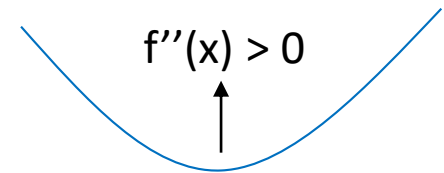


cekung ke bawah

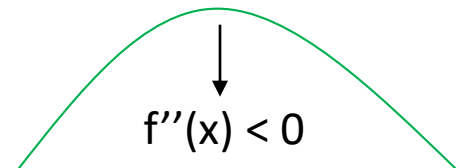
Teorema Kecekungan Fungsi

Misalkan f mempunyai turunan kedua pada I . Jika $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in I$, maka grafik fungsi f cekung ke atas pada I .
Jika $f''(x) < 0$ untuk setiap $x \in I$, maka grafik fungsi f cekung ke bawah pada I .

Penjelasan. Jika $f''(x) > 0$, maka $f'(x)$ naik. Jadi f cekung ke atas.
Jika $f''(x) < 0$, maka $f'(x)$ turun. Jadi f cekung ke bawah.



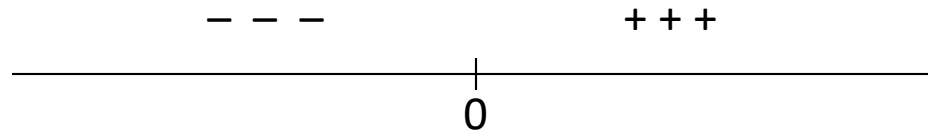
cekung ke atas



cekung ke bawah

Contoh 2

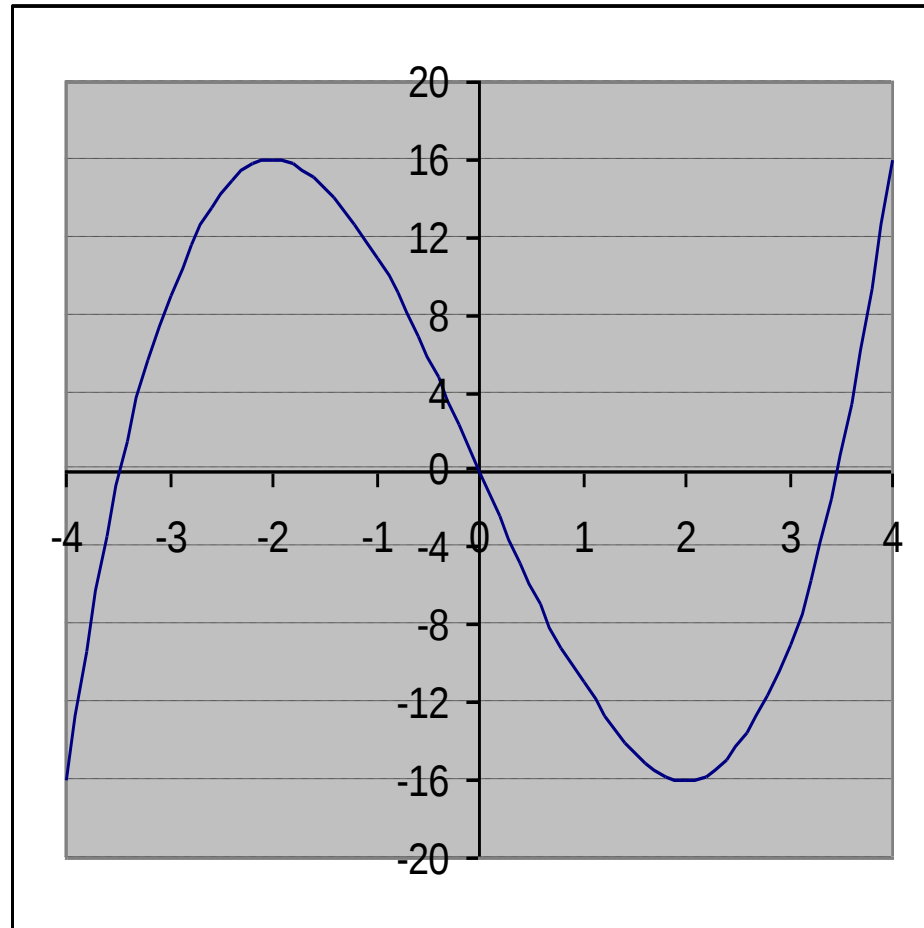
Diketahui $f(x) = x^3 - 12x$. Maka, $f'(x) = 3x^2 - 12$ dan $f''(x) = 6x$. Periksa tanda $f''(x)$:



Menurut Teorema Kecekungan, grafik fungsi f cekung ke atas pada $(0, \infty)$ dan cekung ke bawah pada $(-\infty, 0)$.

Catatan. Titik $x = 0$ merupakan **titik infleksi** (**titik belok**) grafik fungsi f . Di titik ini, grafik fungsi f mengalami perubahan kecekungan.

Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$.



Latihan

1. Tentukan pada selang mana grafik fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ naik atau turun. Tentukan pula pada selang mana ia cekung ke atas atau cekung ke bawah, serta titik belok-nya, bila ada.
2. Air dituangkan ke dalam tangki berbentuk kerucut terbalik dengan laju $8 \text{ dm}^3/\text{menit}$. Jika **tinggi** tangki tersebut adalah 24 dm dan **jari-jari** permukaan atasnya 12 dm , dan tinggi air (h) dipandang sebagai fungsi dari waktu (t), selidiki kemonotonan dan kecekungan grafik fungsi $h(t)$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

3.3 MAKSIMUM DAN MINIMUM LOKAL

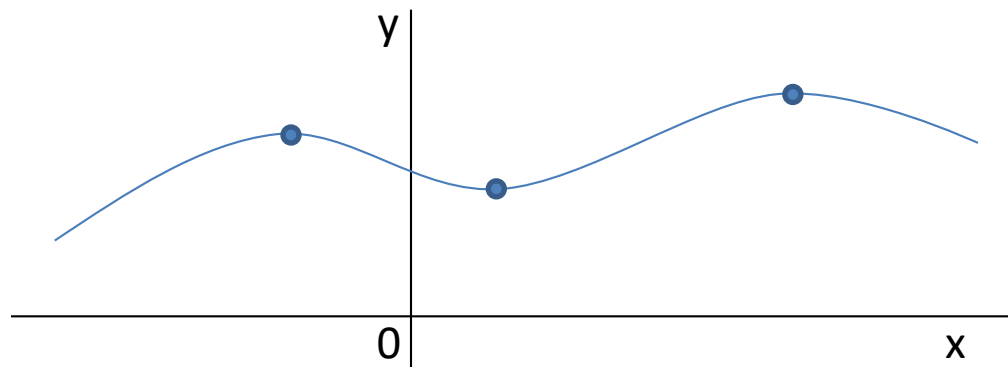
Menentukan **nilai maksimum dan minimum lokal** dari suatu fungsi yang diberikan.

Maksimum dan Minimum Lokal

Nilai $f(c)$ disebut **nilai maksimum lokal** f jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(c) \geq f(x)$ pada $I \cap (c-\delta, c+\delta)$.

Nilai $f(c)$ disebut **nilai minimum lokal** f jika terdapat $\delta > 0$ sehingga $f(c) \leq f(x)$ pada $I \cap (c-\delta, c+\delta)$.

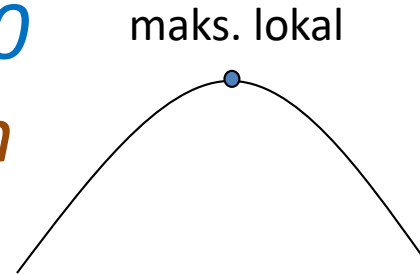
Nilai maksimum/minimum lokal disebut **nilai ekstrim lokal**.



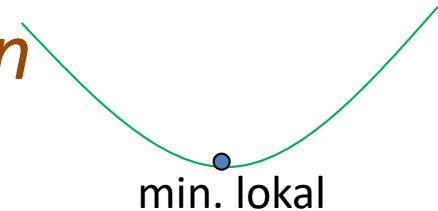
Teorema: Uji Turunan Pertama

Misalkan f kontinu di c .

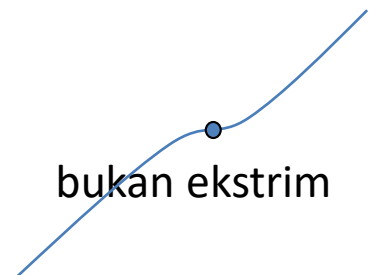
Jika $f'(x) > 0$ di sekitar kiri c dan $f'(x) < 0$ di sekitar kanan c , maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal.



Jika $f'(x) < 0$ di sekitar kiri c dan $f'(x) > 0$ di sekitar kanan c , maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal.

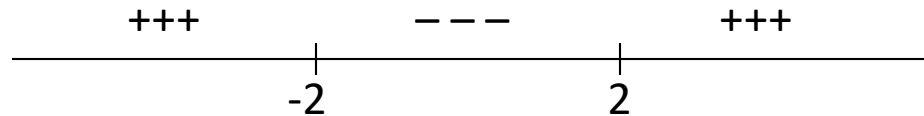


Jika $f'(x)$ bertanda sama di sekitar kiri dan kanan c , maka $f(c)$ bukan merupakan nilai ekstrim lokal.



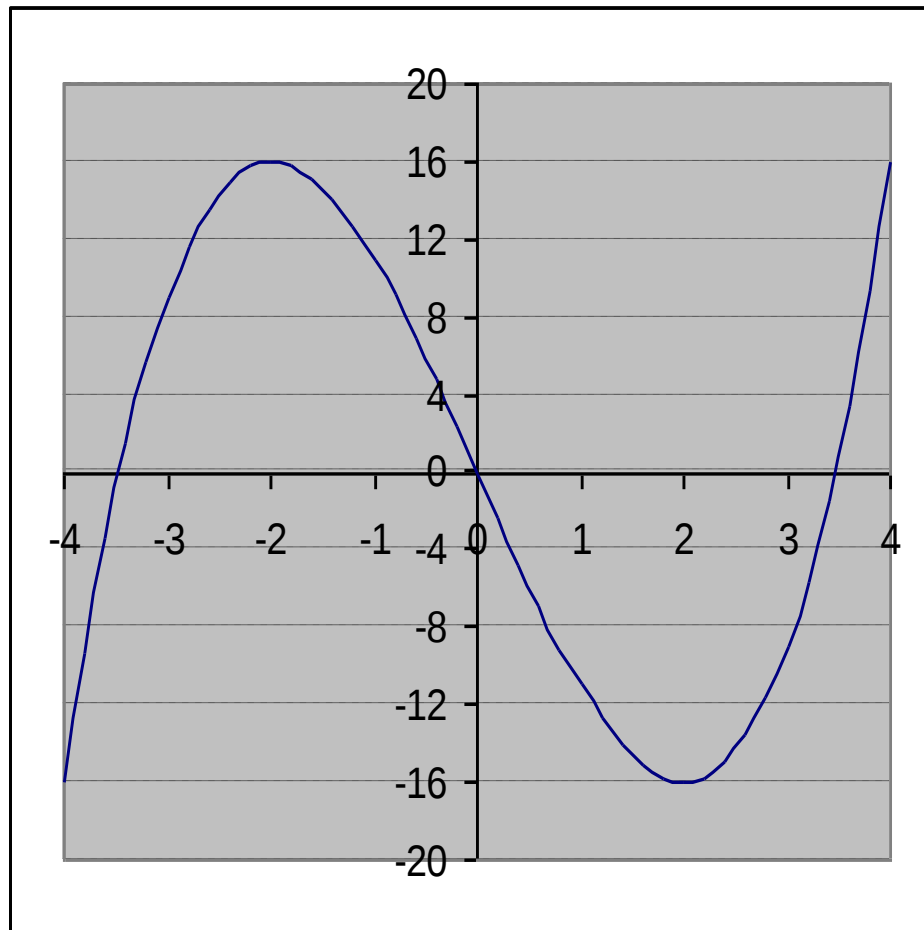
Contoh. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal $f(x) = x^3 - 12x$.

Jawab: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$ mempunyai tanda sbb:



Menurut Uji Turunan Pertama, $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal dan $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal, sesuai dengan yang kita lihat pada grafiknya.

Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x$.



Teorema: Uji Turunan Kedua

Misalkan $f'(c) = 0$ dan f mempunyai turunan kedua pada suatu selang yang memuat c .

Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai maksimum lokal.

Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ merupakan nilai minimum lokal.

Catatan: Dalam hal $f''(c) = 0$, tidak ada kesimpulan apa-apa tentang $f(c)$. Titik $(c, f(c))$ juga **belum tentu** merupakan titik belok.

Contoh. Tentukan nilai maksimum dan minimum lokal $f(x) = x^3 - 12x$.

Jawab: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ di $x = -2$ dan di $x = 2$.

Dengan Uji Turunan Kedua, kita hitung

$f''(x) = 6x < 0$ di $x = -2$; jadi $f(-2)$ merupakan nilai maksimum lokal.

Sementara itu, $f''(x) = 6x > 0$ di $x = 2$; jadi $f(2)$ merupakan nilai minimum lokal.

Catatan: Hasil ini sesuai dengan hasil sebelumnya.

Latihan

Menggunakan Uji Turunan Pertama, tentukan nilai ekstrim lokal fungsi berikut:

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

2. $h(x) = x/2 - \sin x$, $0 < x < 2\pi$.

Menggunakan Uji Turunan Kedua, tentukan nilai ekstrim lokal fungsi berikut:

3. $g(x) = x + 1/x$, $x \neq 0$.

4. $F(x) = 64/(\sin x) + 27/(\cos x)$, $0 < x < \pi/2$.