MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2019/2020

11 September 2019

Fungsi Kontinu pada Selang Tutup

Fungsi f dikatakan **kontinu pada [a,b]** apabila f kontinu pada (a,b), kontinu kanan di a, dan kontinu kiri di b.

Contoh: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada $[-1,2]$.

Grafik fungsi f yang kontinu pada selang tutup $[a,b]$ *tidak terputus* dari titik $(a,f(a))$ ke $(b,f(b))$.

Teorema **N**ilai **A**ntara

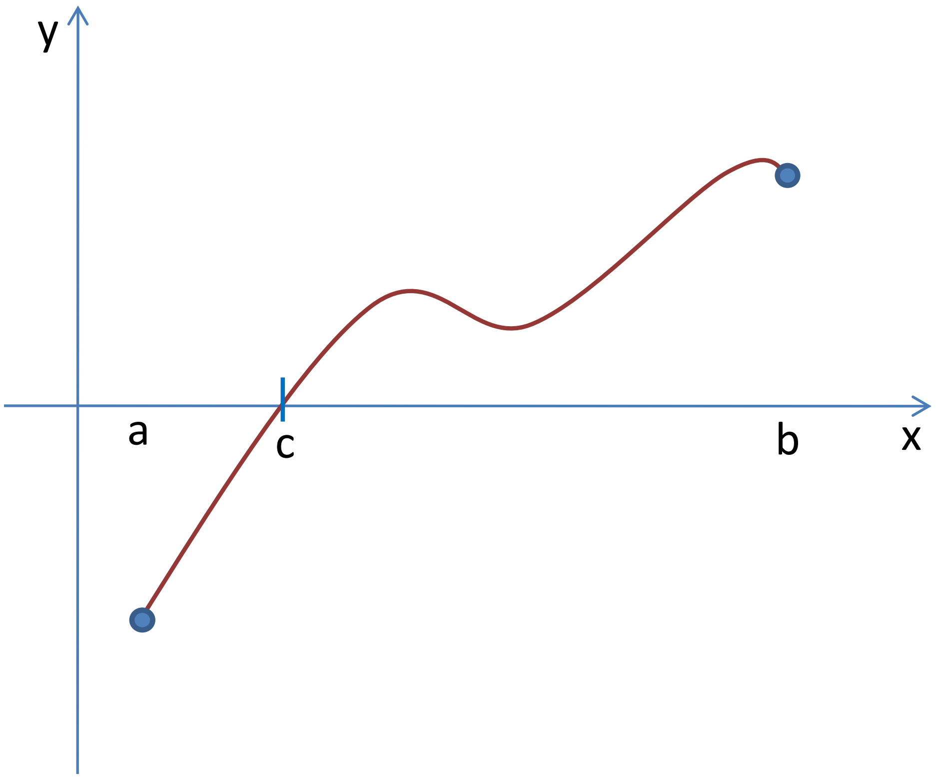
Jika f kontinu pada [*a,b*], *f(a) < 0 dan f(b) > 0* (*atau sebaliknya, f(a) > 0 dan f(b) < 0*), *maka terdapat c* ϵ (*a,b*) *sehingga f(c) = 0*.

Contoh: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada [-1,2], $f(-1) = -1$ dan $f(2) = 5$. Menurut Teorema Nilai Antara, terdapat $c \in (-1,2)$ sehingga

$$f(c) = c^3 - c^2 + 1 = 0$$

(yakni, f mempunyai **akar** pada [-1,2]).

Ilustrasi TNA



Latihan

1. Tentukan nilai *L* agar *f* kontinu di 1.

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, \qquad x \neq 1$$
$$= L, \qquad x = 1$$

2. Tentukan *a* dan *b* agar *f* kontinu di setiap titik.

$$f(x) = -1, \qquad x < -1$$
$$= ax + b, -1 \le x \le 1$$
$$= 2, \qquad x > 1.$$

3. Buktikan bahwa $p(x) = x^5 - x - 1$ mempunyai akar positif.

Apa yang Telah Anda Pelajari pada Bab 1:

1.1 Pengantar Limit

1.2 Limit Fungsi

Masih ingat definisinya?

1.3 Teorema-Teorema Limit

Masih ingat apa saja teoremanya?

1.4 Limit Fungsi Trigonometri

1.5 Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

1.6 Kekontinuan (termasuk Teorema Nilai Antara)

MA1101 MATEMATIKA 1A

BAB 2. TURUNAN

Sasaran Kuliah Hari Ini

2.1 Dua Masalah Satu Tema

Mengetahui latar belakang konsep turunan.

2.2 Turunan

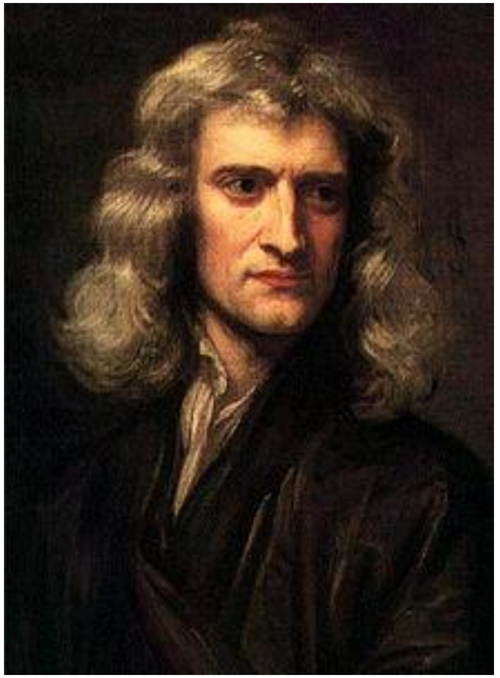
Memahami konsep dan dapat menentukan turunan fungsi di suatu titik yang diberikan.

MA1101 MATEMATIKA 1A

2.1 DUA MASALAH SATU TEMA

Mengetahui latar belakang konsep turunan

Kecepatan Sesaat



http://en.wikipedia.org

Misalkan sebuah partikel bergerak sepanjang garis lurus menurut persamaan $x = x(t)$, dengan $x(t)$ menyatakan posisi benda tersebut pd saat t. **Kecepatan rata-rata**-nya dari $t = a$ s/d $t = b$ adalah

$$v[a,b] = [x(b) - x(a)]/(b - a).$$

Kecepatan sesaat pada $t = a$ adalah

$$v(a) = \lim_{b \to a} \frac{x(b) - x(a)}{b - a}.$$

Contoh

Sebuah benda jatuh bebas dari ketinggian 100 m, sehingga tingginya pada saat t adalah $h(t) = 100 - 4{,}9t^2$. Berapakah kecepatannya pada saat $t = 1$?

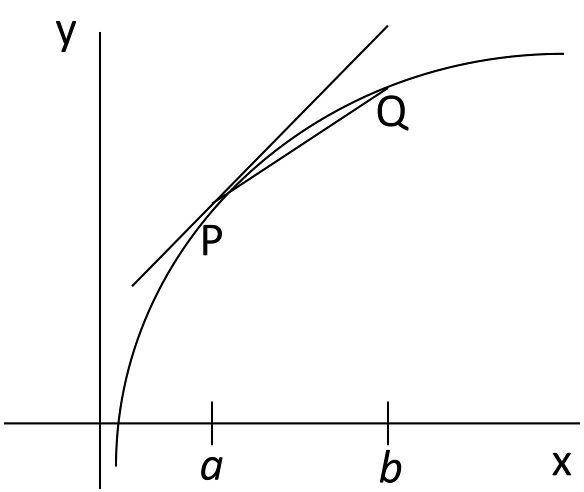
Jawab: $$v(1) = \lim_{t \to 1} \frac{h(t) - h(1)}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{4{,}9(1 - t^2)}{t - 1}$$

$$= \lim_{t \to 1} (-4{,}9)(1 + t) = -9{,}8 m / \det.$$

Gradien Garis Singgung

http://www.123rf.com

Misalkan kita mempunyai fungsi $y = f(x)$ yang grafiknya cukup mulus, khususnya di sekitar $x = a$, sehingga mempunyai garis singgung di titik $P(a,f(a))$ --- lihat gambar.



Gradien garis yg melalui titik $P(a,f(a))$ dan $Q(b,f(b))$ adalah $m = [f(b) – f(a)] \div (b – a)$. Gradien **garis singgung** pada grafik $y = f(x)$ di $P(a,f(a))$ adalah

$$m_a = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Contoh 4

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2$ di titik $(1,1)$.

<u>Jawab</u>: Gradien garis singgungnya adalah

$$m_1 = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 1 = 2(x - 1).$$

Latihan

1. Sebuah benda jatuh bebas dari ketinggian 50 m, sehingga tingginya pada saat t adalah $h(t) = 50 – 4{,}9t^2$. Berapakah kecepatannya pada saat $t = 2$?
2. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^3$ di titik $(2,8)$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

2.2 TURUNAN

Memahami konsep dan dapat menentukan turunan fungsi di suatu titik yang diberikan

Definisi Turunan di Suatu Titik

Pada bagian sebelumnya kita melihat bahwa kecepatan sesaat dan gradien garis singgung ternyata merupakan bentuk limit yang sama.

Hal ini memotivasi kita untuk membahas bentuk limit tersebut secara khusus.

Definisi: Fungsi $y = f(x)$ dikatakan mempunyai **turunan di *a*** apabila limit berikut ada:

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Turunan *f* di *a* didefinisikan sama dengan limit ini, dan dilambangkan dengan $f'(a)$.

Catatan & Contoh

<u>Catatan</u>: Dengan substitusi $b = a + h$, kita peroleh

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

asalkan *limit ini ada*.

Contoh: Misalkan $f(x) = x^2$ dan $a = 1$. Kita hitung

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2.$$

Jadi, f mempunyai turunan di 1 dan $f'(1) = 2$.

Secara umum, dapat diperiksa bahwa f mempunyai turunan di $a \in \mathbf{R}$ sembarang dan $f'(a) = 2a$.

Aturan Dasar Turunan

1. Jika $f(x) = k$ (konstanta), maka $f'(x) = 0$.

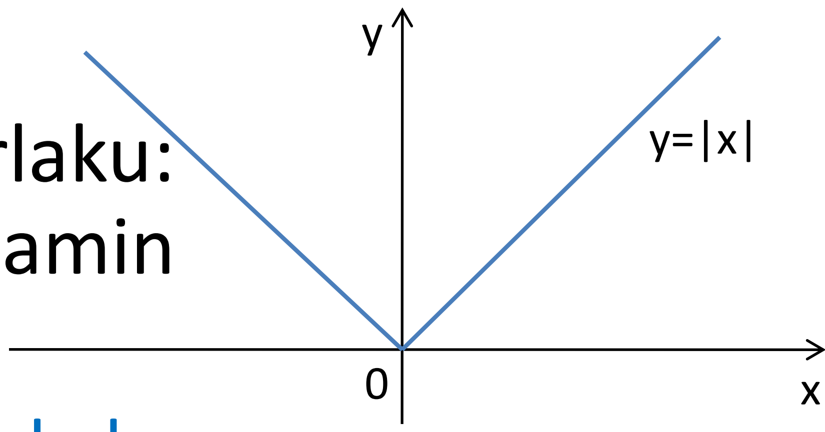
2. Jika $f(x) = x$ (fungsi identitas), maka $f'(x) = 1$.

3. Jika $f(x) = x^n$ (fungsi pangkat, n bilangan bulat positif), maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

Hubungan antara Turunan dan Kekontinuan

Jika f mempunyai turunan di a,
maka f kontinu di a (penjelasan diberikan di papan tulis).

Namun, sebaliknya tidak berlaku: Kekontinuan di *a* **tidak** menjamin adanya turunan di *a*.



Sebagai contoh, fungsi $f(x) = |x|$ kontinu di 0 tetapi tidak mem-punyai turunan di 0. ← Buktikan!

Latihan

1. Tentukan turunan $f(x) = \sqrt{x}$ di $a > 0$ sembarang.
2. Tentukan turunan $f(x) = \sqrt[3]{x}$ di $a \neq 0$ sembarang.
3. Tentukan turunan $f(x) = 1/x$ di $a \neq 0$ sembarang.
4. Buktikan bahwa $f(x) = |x|$ tidak mempunyai turunan di 0.
5. Diketahui $f(x) = x \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$. Selidiki apakah f mempunyai turunan di 0.
6. Diketahui $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$. Selidiki apakah f mempunyai turunan di 0.