

MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2019/2020

6 September 2019

Limit Trigonometri Khusus

$$1. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \quad 2. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0.$$

Bukti (1) diperoleh dengan menunjukkan bahwa untuk $t \neq 0$, berlaku

$$\cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1.$$

GAMBAR LINGKARAN
UNTUK MEMBUKTIKAN
KETAKSAMAAN INI.

Karena $\lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1$, maka dengan Teorema Apit kita simpulkan bahwa $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Latihan

1. Menggunakan fakta bahwa $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$,
hitunglah:

a. $\lim_{t \rightarrow 0} \sin t \cdot \cot 2t$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 2x)}{2x^2 + x}$

2. Buktikan bahwa $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$.

Sasaran Kuliah Hari Ini

1.5 Limit di Tak Hingga dan Limit Tak Hingga

Menghitung **limit di tak hingga** dan **limit tak hingga**.

1.6 Kekontinuan

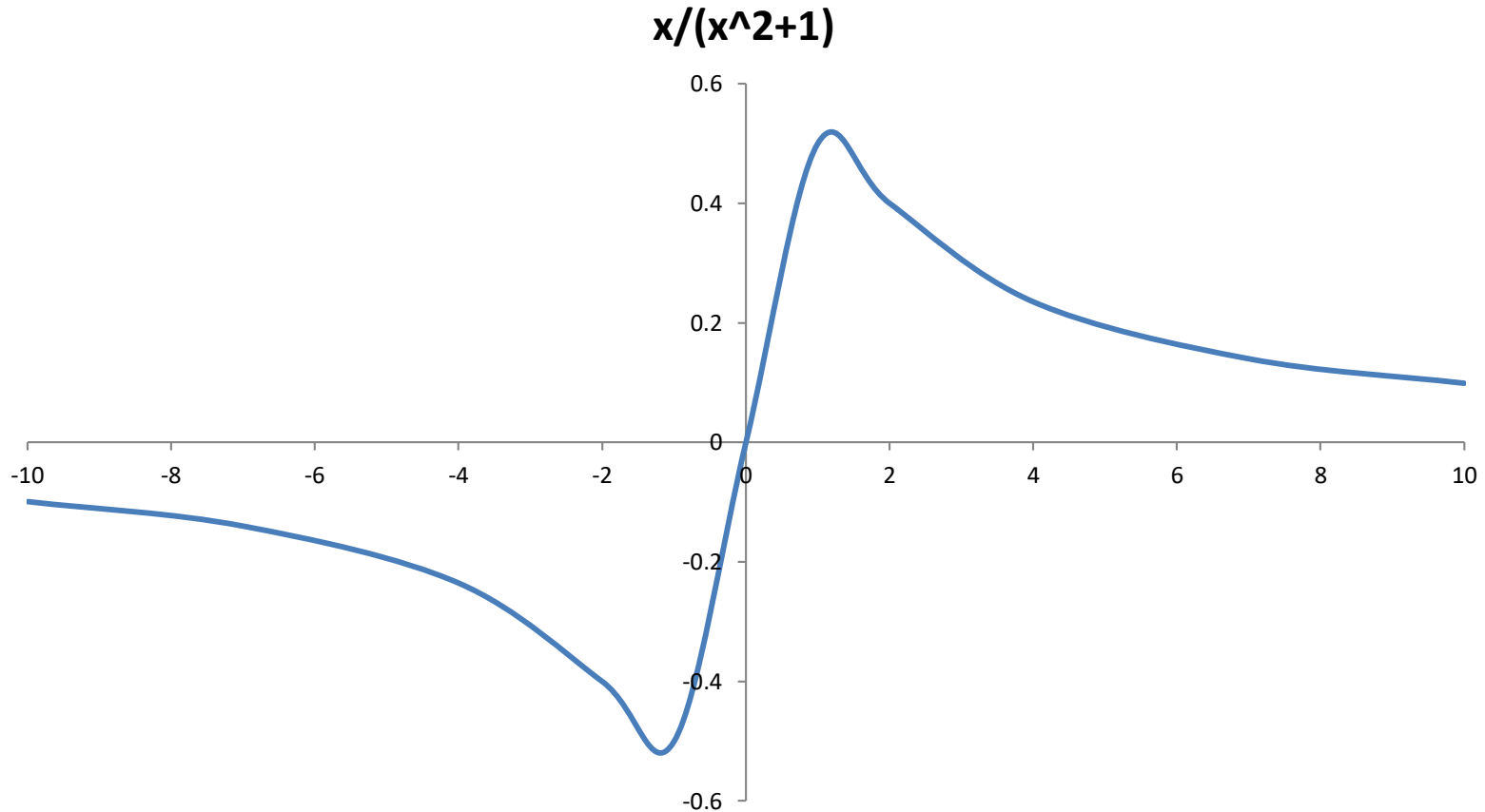
Memeriksa **kekontinuan** fungsi dan menggunakan **Teorema Nilai Antara** untuk memecahkan masalah yang relevan.

MA1101 MATEMATIKA 1A

1.5 LIMIT DI TAK HINGGA & LIMIT TAK HINGGA

Menghitung **limit di tak hingga** dan **limit tak hingga**

Apa yang Terjadi Bila $x \rightarrow \infty$ atau $-\infty$?



Limit di Tak Hingga

Misalkan f terdefinisi pada $[c, \infty)$. Kita tuliskan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

apabila: untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M > c$

sehingga: jika $x > M$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

[Secara intuitif, “limit f di tak hingga” sama dgn L jika untuk x cukup besar, nilai $f(x)$ dekat ke L .]

Contoh 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. [jika $x > ??$, maka $|1/x| < \varepsilon$.]

Contoh 2

Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$.

Bukti. Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang, pilih $M \geq 1/\varepsilon$.
Kita periksa: jika $x > M$, maka

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| < \frac{1}{x} < \frac{1}{M} < \varepsilon.$$

Ini membuktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$.

Limit di Minus Tak Hingga

Misalkan f terdefinisi pada $(-\infty, d]$. Kita tuliskan

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

apabila: untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N < d$

sehingga: jika $x < N$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

[Secara intuitif, “limit f di minus tak hingga” sama dgn L jika utk x minus besar, nilai $f(x)$ dekat ke L .]

Contoh 3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. [jika $x < ??$, maka $|1/x| < \varepsilon$.]

Contoh 4

Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$.

Bukti. Coba sendiri.

Catatan

Selain Teorema Substitusi, teorema-teorema limit dan Teorema Apit berlaku pula untuk limit di tak hingga.

Sebagai contoh,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Limit Tak Hingga

Tinjau fungsi $f(x) = 1/x$, dengan $x \neq 0$.

Apa yang terjadi di dekat $x = 0$?

Berapakah nilai limit f di 0, bila ada?

Misalkan f terdefinisi di sekitar $x = c$. Kita tuliskan

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$$

apabila: untuk setiap $M > 0$ terdapat $\delta > 0$

sehingga: jika $0 < x - c < \delta$, maka $f(x) > M$.

Limit Tak Hingga

Misalkan f terdefinisi di sekitar $x = c$. Kita tuliskan

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$$

apabila: untuk setiap $M > 0$ terdapat $\delta > 0$

sehingga: jika $0 < c - x < \delta$, maka $f(x) > M$.

Catatan: $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$
didefinisikan secara analog. [Rumuskan sendiri
definisinya, atau lihat buku.]

Contoh

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ [jika $0 < x < ??$, maka $1/x > M$.]

2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ [jika $0 < -x < ??$, maka $1/x < N$.]

Latihan

1. Hitunglah:

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^2 + 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

2. Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{4 - x^2}$ dan $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{4 - x^2}$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

1.6 KEKONTINUAN

Memeriksa **kekontinuan** fungsi dan menggunakan **Teorema Nilai Antara** untuk memecahkan masalah yang relevan

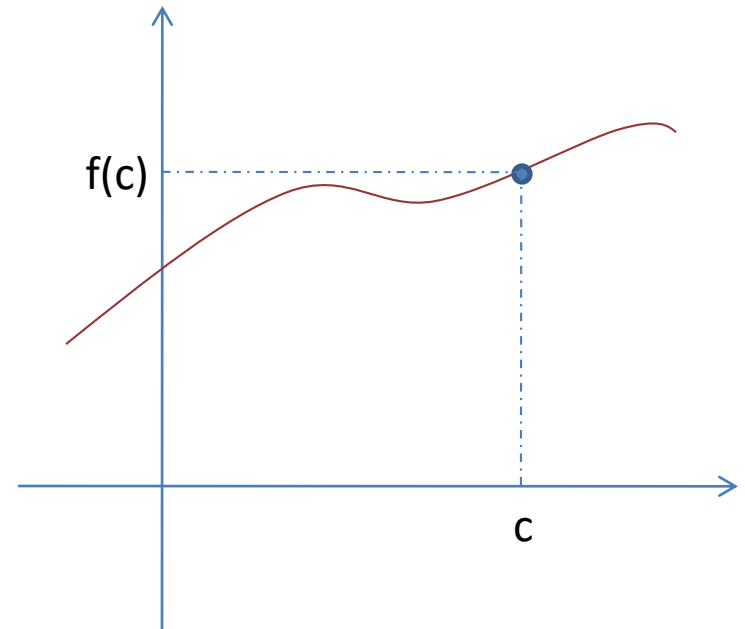
Fungsi Kontinu di Suatu Titik

Misalkan f terdefinisi di sekitar c , termasuk di c .

Fungsi f dikatakan **kontinu di c** apabila

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c),$$

yakni: **untuk setiap $\varepsilon > 0$**
terdapat $\delta > 0$ sehingga:
jika $|x - c| < \delta$, maka
 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.



Fungsi f dikatakan **kontinu pada (a,b)** apabila f kontinu di *setiap* titik $c \in (a,b)$.

Keluarga Fungsi Kontinu

1. Fungsi polinom kontinu di setiap titik pada **R**. Demikian pula fungsi rasional kontinu di setiap titik pada daerah asalnya. **[Ingat Teorema Substitusi.]**
2. Fungsi nilai mutlak $f(x) = |x|$ kontinu pada **R**.
3. Fungsi akar $f(x) = \sqrt{x}$ kontinu pada $(0, \infty)$. Fungsi ini **kontinu kanan** di $c = 0$.
4. Fungsi $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ kontinu pada **R**.

Teorema

Jika f dan g kontinu di c dan k konstanta, maka kf , $f + g$, $f - g$, fg , f/g , f^n , dan $\sqrt[n]{f}$ kontinu di c .

Jika $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ dan f kontinu di L , maka
$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(L).$$

Jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$, maka $f \circ g$ kontinu di c .

Contoh

1. $f(x) = x \sin x$ kontinu di setiap titik karena merupakan hasil kali dua buah fungsi yang kontinu di setiap titik (pada $\mathbf{R}$).
2. $F(x) = |x^2 - 1|$ kontinu di setiap titik (pada $\mathbf{R}$) karena $h(x) = x^2 - 1$ kontinu di setiap titik, $g(x) = |x|$ juga kontinu di setiap titik, dan $F(x) = g(h(x)) = (g \circ h)(x)$.

Fungsi Kontinu pada Selang Tutup

Fungsi f dikatakan **kontinu pada $[a,b]$** apabila f kontinu pada (a,b) , kontinu kanan di a , dan kontinu kiri di b .

Contoh: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada $[-1,2]$.

Grafik fungsi f yang kontinu pada selang tutup $[a,b]$ *tidak terputus* dari titik $(a,f(a))$ ke $(b,f(b))$.

Teorema Nilai Antara

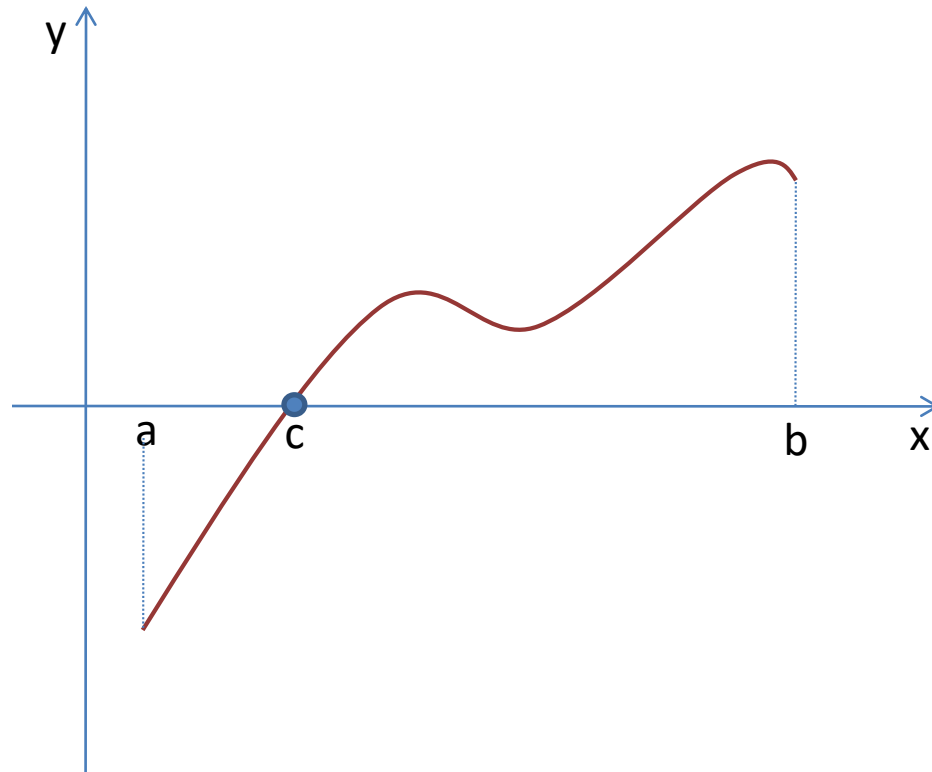
Jika f kontinu pada $[a,b]$, $f(a) < 0$ dan $f(b) > 0$ (atau sebaliknya, $f(a) > 0$ dan $f(b) < 0$), maka terdapat $c \in (a,b)$ sehingga $f(c) = 0$.

Contoh: $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ kontinu pada $[-1,2]$,
 $f(-1) = -1$ dan $f(2) = 5$. Menurut Teorema Nilai Antara, terdapat $c \in (-1,2)$ sehingga

$$f(c) = c^3 - c^2 + 1 = 0$$

(yakni, f mempunyai **akar** pada $[-1,2]$).

Ilustrasi TNA



Latihan

1. Tentukan nilai L agar f kontinu di 1.

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$$
$$= L, \quad x = 1.$$

2. Tentukan a dan b agar f kontinu di setiap titik.

$$f(x) = -1, \quad x < -1$$
$$= ax^3 + b, -1 \leq x \leq 1$$
$$= 2, \quad x > 1.$$

3. Buktikan bahwa $p(x) = x^5 - x - 1$ mempunyai akar positif.