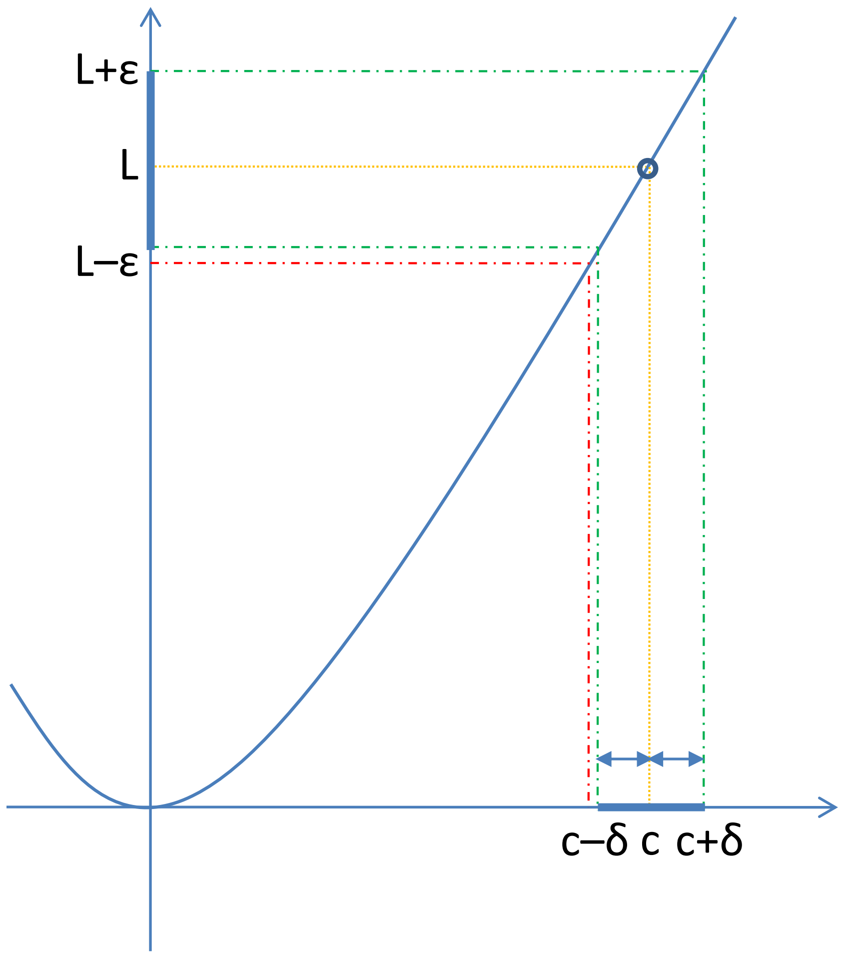
MA1101 MATEMATIKA 1A

Hendra Gunawan

Semester I, 2019/2020

4 September 2019

Kuliah yang Lalu: Limit Fungsi



Benar/Salah Kalimat Berikut?

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga:

Jika $0 < |x - 2| < \delta$, maka $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Benar; bilangan $\delta > 0$ yang memenuhi pernyataan di atas adalah $\delta =$ .... ??

Ini membuktikan bahwa: $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$

Latihan

1. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 3}(2x-7) = -1.$ [Mudah; δ = ε/2]
2. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 4}\sqrt{x} = 2.$ [δ = 2ε]
3. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$ [δ = ??]

Analisis Pendahuluan $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Diberikan ε > 0 sembarang, kita harus mencari δ > 0 sehingga:
jika $0 < |x-2| < \delta$, maka $|x^2 - 4| < \varepsilon$ ... (*)

Untuk itu, kita bekerja **mundur** dari bentuk $|x^2 - 4|$.

Perhatikan bahwa

$$|x^2 - 4| = |x + 2|\,|x - 2| \quad \ldots \quad (\#)$$

Jika kita bisa menaksir $|x + 2|$, maka tugas kita akan mudah.

Karena kita sedang berbicara tentang x di sekitar 2, mari kita asumsikan bahwa $|x - 2| < 1$.

Dalam hal ini, $1 < x < 3$, sehingga $3 < x+2 < 5$. Jadi $|x + 2| < 5$.

Kembali ke (#), kita dapatkan: $|x^2 - 4| < 5|x - 2|$.

Jadi, jika $|x - 2| < \varepsilon/5$, maka $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Dengan demikian ada dua hal yang menjamin $|x^2 - 4| < \varepsilon$, yaitu: $|x - 2| < 1$ dan $|x - 2| < \varepsilon/5$.

Dalam hal ini kita dapat memilih $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$, sehingga jika $|x - 2| < \delta$, maka $|x - 2| < 1$ dan $|x - 2| < \varepsilon/5$.

Bukti bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \min \{ 1, \varepsilon/5 \}$.

Selanjutnya kita periksa jika $0 < |x - 2| < \delta$, maka

$$|x^2 - 4| = |x + 2|\,|x - 2|$$

$$< 5|x - 2| \quad \text{(karena } |x + 2| < 5\text{)}$$

$$< \varepsilon \quad \text{(karena } |x - 2| < \varepsilon/5\text{)}.$$

Ini membuktikan bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Soal PR (Dikumpulkan hari Jumat)

Buktikan bahwa $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{1}{x} = 2.$

Sasaran Kuliah Hari Ini

1.3 Teorema-Teorema Limit

Menggunakan teorema-teorema limit dalam penghitungan berbagai limit fungsi aljabar.

1.4 Limit Fungsi Trigonometri

Menghitung berbagai limit fungsi trigonometri.

MA1101 MATEMATIKA 1A

1.3 TEOREMA-TEOREMA LIMIT

Menggunakan teorema-teorema limit dalam penghitungan berbagai limit fungsi aljabar.

Teorema Utama Limit

Catatan. Teorema merupakan suatu pernyataan yang dapat **dibuktikan** kebenarannya, dan kemudian dapat digunakan sebagai "senjata" kita dlm pemecahan masalah terkait.

Misalkan k konstanta, n ϵ ***N****, f dan g fungsi yang mempunyai limit di c.*

1. $\lim_{x \to c} k = k.$

2. $\lim_{x \to c} x = c.$

3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x).$

4. $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x).$

Teorema Utama Limit

5. $\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to c} g(x).$

6. $\lim\limits_{x\to c} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x)/\lim\limits_{x\to c} g(x),\ \lim\limits_{x\to c} g(x)\neq 0.$

7. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to c} f(x)]^n.$

8. $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)},$ *asalkan* $\lim\limits_{x\to c} f(x) > 0$ *untuk n genap*.

<u>Catatan</u>. Teorema berlaku juga untuk limit sepihak (limit kanan dan limit kiri).

Contoh Penggunaan Teorema Limit

1. $$\lim_{x\to 1}(2x^3+5x-7)=2(\lim_{x\to 1} x)^3+5\lim_{x\to 1} x-\lim_{x\to 1} 7$$
$$=2.1^3+5.1-7=0.$$

2. $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}}{\lim_{x\to 2}(x+1)}=\frac{\sqrt{(\lim_{x\to 2} x)^2+\lim_{x\to 2} 5}}{\lim_{x\to 2} x+\lim_{x\to 2} 1}$$
$$=\frac{\sqrt{2^2+5}}{2+1}=\frac{\sqrt{9}}{3}=1.$$

Contoh Penggunaan Teorema Limit

3. Diketahui $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ dan $\lim_{x\to 1} g(x) = 8.$

Tentukan $\lim_{x\to 1} f^2(x)\cdot\sqrt[3]{g(x)}.$

<u>Jawab</u>: Menggunakan Teorema 5, 7 dan 8,

$$\lim_{x\to 1} f^2(x)\cdot\sqrt[3]{g(x)} = (\lim_{x\to 1} f(x))^2\cdot\sqrt[3]{\lim_{x\to 1} g(x)}$$

$$= 3^2\cdot\sqrt[3]{8} = 18.$$

Teorema Substitusi

Jika f adalah fungsi polinom atau fungsi rasional, maka

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

asalkan f(c) terdefinisi.

Contoh 1. $\lim_{x\to 1}(2x^3 + 5x - 7) = 2.1^3 + 5.1 - 7 = 0.$

Contoh 2. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+2}{x+1} = \dfrac{2^2+2}{2+1} = \dfrac{6}{3} = 2.$

Teorema Apit

Misalkan f, g, dan h fungsi yang memenuhi

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

untuk x di sekitar c. Jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

Maka

$$\lim_{x \to c} g(x) = L.$$

Catatan. Teorema Apit berlaku pula untuk limit sepihak.

Contoh Penggunaan Teorema Apit

Untuk x > 0 di dekat 0, berlaku

$$-1 \le \sin(1/x) \le 1.$$

Bila kita kalikan ketiga ruas dengan x, maka

$$-x \le x.\sin(1/x) \le x.$$

Karena $\lim_{x\to 0^+} (-x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$, maka menurut Teorema Apit

$$\lim_{x\to 0^+} x \sin \tfrac{1}{x} = 0.$$

Dengan cara serupa, $\lim_{x\to 0^-} x \sin \tfrac{1}{x} = 0.$

Latihan

1. Menggunakan teorema limit, hitunglah:
   a. $\lim_{x\to -1}(x^3 - 4x + \tfrac{1}{x})$
   b. $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^4 - 1}}{x^2 + 1}$

   Catatan. Sebutkan teorema yang anda pakai.

2. Buktikan bahwa $\lim_{x\to 0} x^2 \cos \tfrac{1}{x} = 0$.

MA1101 MATEMATIKA 1A

1.4 LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Menghitung berbagai limit fungsi trigonometri.

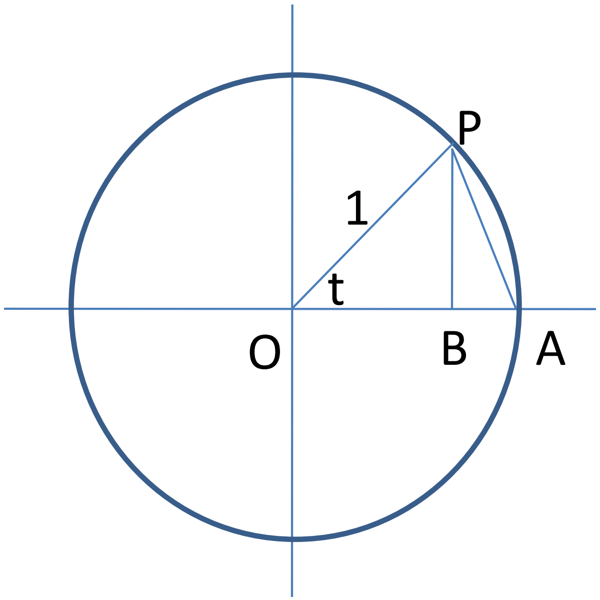
Limit Fungsi Trigonometri

$$1. \lim_{x \to c} \sin x = \sin c \qquad 2. \lim_{x \to c} \cos x = \cos c$$

$$3. \lim_{x \to c} \tan x = \tan c \qquad 4. \lim_{x \to c} \cot x = \cot c$$

$$5. \lim_{x \to c} \sec x = \sec c \qquad 6. \lim_{x \to c} \csc x = \csc c$$

Bukti bahwa $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$



Untuk t > 0, berlaku 0<|BP|<|AP|.

Karena |BP| = sin t dan |AP| < t,

maka $0 < \sin t < t$.

Dengan Teorema Apit,

$$\lim_{t \to 0^+} \sin t = 0.$$

Serupa dengan itu, $\lim_{t \to 0^-} \sin t = 0.$

Jadi $\lim_{t \to 0} \sin t = 0.$

Dengan cara serupa, dapat dibuktikan $\lim_{t \to 0} \cos t = 1.$

Bukti bahwa $\lim_{x \to c} \sin x = \sin c$

Untuk menunjukkan bahwa $\lim_{t \to c} \sin t = \sin c$, misalkan k = t – c sehingga k → 0 ketika t → c. Jadi

$$\begin{aligned}\lim_{t \to c} \sin t &= \lim_{k \to 0} \sin(c + k) \\ &= \lim_{k \to 0} (\sin c . \cos k + \cos c . \sin k) \\ &= (\sin c).1 + (\cos c).0 \\ &= \sin c.\end{aligned}$$

Limit Trigonometri Khusus

$$1. \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \qquad 2. \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0.$$

Bukti (1) diperoleh dengan menunjukkan bahwa untuk t ≠ 0, berlaku

$$\cos t \le \frac{\sin t}{t} \le 1.$$

Karena $\lim_{t \to 0} \cos t = 1$, maka dengan Teorema Apit kita simpulkan bahwa $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$

Latihan

1. Menggunakan fakta bahwa $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, hitunglah:

   a. $\lim_{t\to 0}\sin t.\cot 2t$

   b. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+2x)}{2x^2+x}$

2. Buktikan bahwa $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=0.$