

MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2016/2017

19 April 2017

Kuliah yang Lalu

13.1 Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

13.2 Integral Berulang

**13.3 Integral Lipat Dua atas Daerah Bukan
Persegi Panjang**

13.4 Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

13.5 Penggunaan Integral Lipat Dua

Kuliah Hari Ini

**15.1 Persamaan Diferensial Linear Orde 2,
Homogen**

**15.2 Persamaan Diferensial Linear Orde 2,
Tak Homogen**

15.3 Penggunaan Persamaan Diferensial
Orde 2

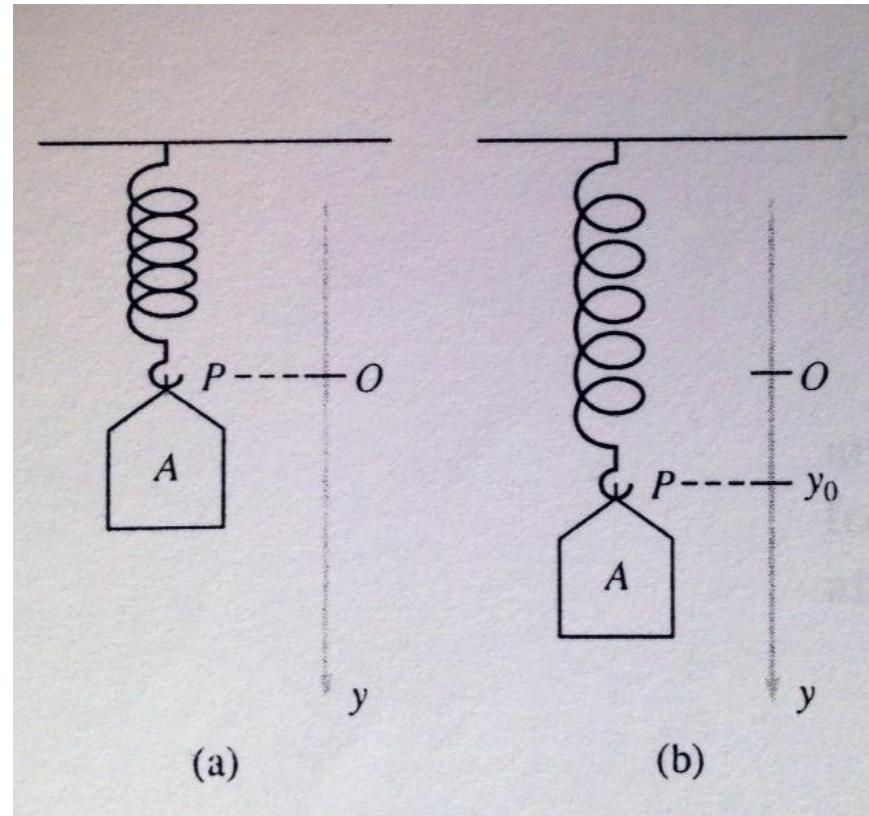
MA1201 MATEMATIKA 2A

15.1 PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE 2, HOMOGEN

Menentukan *solusi umum* dan *solusi khusus*
persamaan diferensial linear orde 2 homogen

Persamaan Diferensial Orde 2

Banyak masalah dalam fisika yang dapat dirumuskan sebagai **persamaan diferensial orde 2**, misalnya gerak harmonik sederhana yang terjadi pada pegas bergetar/berosilasi.



Bentuk Umum Persamaan Diferensial Biasa Orde n

Misal $y = y(x)$ adalah suatu fungsi yang tidak diketahui rumusnya, namun diketahui bahwa y memenuhi suatu persamaan

$$F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0,$$

dengan $y^{(k)}$ menyatakan turunan ke- k dari y , dengan $k = 1, \dots, n$.

Persamaan ini disebut **persamaan diferensial biasa (PDB) orde n** .

Contoh & Solusi (Umum) PDB

1. $y' - 2 \cos x = 0$ merupakan PDB orde 1.
2. $y'' + 3xy' - 2y = 0$ merupakan PDB orde 2.
3. $y''' + (y')^2 + e^x = 0$ merupakan PDB orde 3.

Fungsi $y = f(x)$ disebut **solusi** suatu PDB apabila PDB tsb menjadi *kesamaan* ketika y dan turunan-turunannya disubstitusikan ke dalam PDB tsb.

Sebagai contoh, $y = 2 \sin x + 5$ merupakan *suatu* solusi (khusus) PDB orde 1 di atas.

Solusi umum PDB orde 1 di atas adlh $y = 2 \sin x + C$, dengan C konstanta sembarang.

PDB Linear Orde n

PDB yang berbentuk

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y^{(1)} + a_n(x)y = k(x)$$

disebut PDB **linear** orde *n*.

Perhatikan bahwa *y* dan turunan-turunannya memiliki pangkat 1 semuanya.

Karena itu, PDB orde 3 pada *slide* sebelumnya bukan PDB linear, karena mengandung $(y')^2$.

PDB Linear Orde 2, dengan Koefisien Konstanta

PDB linear **orde 2** dapat dituliskan dlm bentuk

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = k(x).$$

Pada kesempatan ini, kita hanya akan membahas PDB linear orde 2 **dengan koefisien konstanta**, yang berbentuk:

$$y'' + a_1y' + a_2y = k(x).$$

Jika $k(x) = 0$, maka PDB tsb disebut PDB **homogen**.

Solusi Umum PDB Linear Orde 2, dengan Koefisien Konstanta

Jika $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ merupakan dua solusi PDB linear orde 2 homogen

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

yang *saling bebas*, maka solusi umum PDB tsb adalah

$$y = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x),$$

dgn C_1 dan C_2 menyatakan konstanta sembarang.
[Verifikasinya di papan tulis!]

Persamaan Karakteristik

Untuk mencari solusi PDB linear orde 2 homogen

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad [*]$$

kita misalkan $y = e^{rx}$ (**mengapa?**). Maka, kita peroleh

$$(r^2 + a_1 r + a_2) e^{rx} = 0.$$

Karena $e^{rx} \neq 0$, maka mestilah

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0.$$

Persamaan ini disebut **persamaan karakteristik** untuk PDB di atas.

Teorema A (Akar Real Berbeda)

Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar real berbeda, r_1 dan r_2 , maka solusi umum PDB [] adalah*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

dengan C_1 dan C_2 konstanta sembarang.

Contoh 1

Tentukan solusi umum PDB orde 2

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Jawab: Persamaan karakteristik PDB ini adalah

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Persamaan ini mempunyai akar $r_1 = 2$ dan $r_2 = 3$.

Jadi solusi umum PDB di atas adalah

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Contoh 1 (lanjutan)

Jika diketahui informasi tambahan, misal **syarat awal** $y(0) = 0$ dan $y'(0) = 1$, maka kita peroleh

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$2C_1 + 3C_2 = 1.$$

(Persamaan kedua diperoleh dari $y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x}$.) Dari kedua persamaan tsb, kita dapatkan $C_1 = -1$ dan $C_2 = 1$.

Jadi kita peroleh solusi khusus yang memenuhi syarat awal di atas, yaitu $y = -e^{2x} + e^{3x}$.

Teorema B (Akar Real Kembar)

Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar real kembar, $r_1 = r_2$, maka solusi umum PDB [] adalah*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x},$$

dengan C_1 dan C_2 konstanta sembarang.

Contoh 2

Tentukan solusi khusus PDB orde 2

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

yg memenuhi **syarat batas** $y(0) = 0$ dan $y(1) = e^2$.

Jawab: Persamaan karakteristik PDB ini adalah

$$r^2 - 4r + 4 = 0.$$

Persamaan ini mempunyai akar kembar $r_{1,2} = 2$.

Jadi solusi umum PDB di atas adalah

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Contoh 2 (lanjutan)

Substitusikan kedua syarat batas, kita peroleh

$$C_1 = 0$$

$$C_1 e^2 + C_2 e^2 = e^2.$$

Jadi $C_1 = 0$ dan $C_2 = 1$, sehingga solusi khusus yang kita cari adalah $y = xe^{2x}$.

Teorema C (Akar Kompleks)

Jika persamaan karakteristik mempunyai dua akar kompleks sekawan, $r_{1,2} = a \pm bi$, maka solusi umum PDB [] adalah*

$$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx),$$

dengan C_1 dan C_2 konstanta sembarang.

Catatan: Di sini $i = \sqrt{-1}$ menyatakan *bilangan imajiner* yang memenuhi $i^2 = -1$.

Contoh 3

Tentukan solusi umum PDB orde 2

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Jawab: Persamaan karakteristik PDB ini adalah

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

Persamaan ini mempunyai akar kompleks $r_{1,2} = 2 \pm i$. Jadi solusi umum PDB di atas adalah

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Soal

Dengan cara serupa, kita dapat menyelesaikan PDB linear orde n yang homogen.

1. Tentukan solusi umum PDB orde 3

$$y''' - y'' - 20y' = 0.$$

2. Tentukan solusi umum PDB orde 4

$$y^{(4)} - y = 0.$$

MA1201 MATEMATIKA 2A

15.2 PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE 2, TAK HOMOGEN

Menentukan solusi khusus dan solusi umum
persamaan diferensial linear orde 2 **tak
homogen**

PDB Linear Orde 2, Tak Homogen

PDB linear orde 2 **tak homogen**, dengan koefisien konstanta, secara umum berbentuk

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = k(x),$$

dengan $k(x) \neq 0$. Jika y_p adalah solusi khusus persamaan tak homogen di atas dan y_h adalah solusi umum pers. homogen $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, maka solusi umum persamaan tak homogen di atas adalah: $y = y_h + y_p$.

Bagaimana mendapatkan y_p ?

Metode Koefisien Tak Tentu

Kita dapat memperoleh solusi khusus y_p dengan cara coba-coba, dengan prinsip:

1. Jika $k(x)$ polinom, maka y_p juga polinom.
2. Jika $k(x) = a.e^{cx}$, maka $y_p = Ae^{cx}$.
3. Jika $k(x) = a.\cos rx + b.\sin rx$, maka
 $y_p = A.\cos rx + B.\sin rx$.

Catatan. Bilangan A dan B merupakan koefisien yang harus dicari. Karena itu metode ini dikenal sebagai **Metode Koefisien Tak Tentu**.

Contoh/Latihan 1

Tentukan solusi umum dari $y'' - 5y' + 6y = x$.

Jawab: Solusi persamaan homogennya adalah $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Untuk mencari solusi khusus, misalkan $y_p = Ax + B$ (**mengapa?**). Maka $y_p' = A$ dan $y_p'' = 0$. Substitusikan ke PDB di atas:

$$-5A + 6(Ax + B) = x.$$

Jadi $6A = 1$ dan $-5A + 6B = 0$, sehingga $A = 1/6$ dan $B = 5/36$. Jadi solusi umum PDB di atas adl

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x/6 + 5/36.$$

Contoh/Latihan 2

Tentukan solusi umum dari $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

Jawab: Solusi persamaan homogenya adalah $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$. Untuk mencari solusi khusus, misalkan $y_p = \dots$

Contoh/Latihan 3

Tentukan solusi umum dari $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$.

Jawab: Solusi persamaan homogenya adalah $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. Untuk mencari solusi khusus, misalkan $y_p = \dots$

Soal

Tentukan solusi umum/khusus dari

1. $y'' - 4y' = x + 1; y(0) = 0, y'(0) = 1.$
2. $y'' - 4y' + 5y = \cos x.$
3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$
4. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + 1.$