# MA3231
## Pengantar Analisis Real

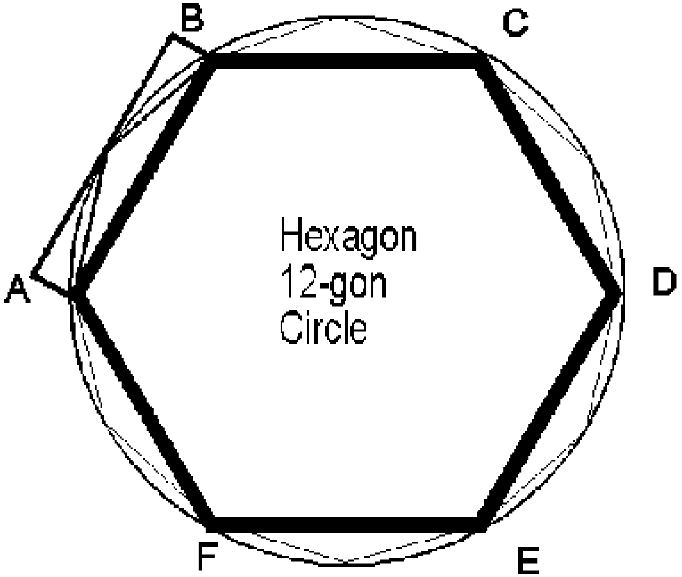
Semester II, Tahun 2016-2017

Hendra Gunawan, Ph.D.

# Eudoxus & Lingkaran

- Fakta bahwa luas lingkaran sebanding dengan kuadrat diameternya dibuktikan* secara *rigorous* oleh Eudoxus (~375 SM).

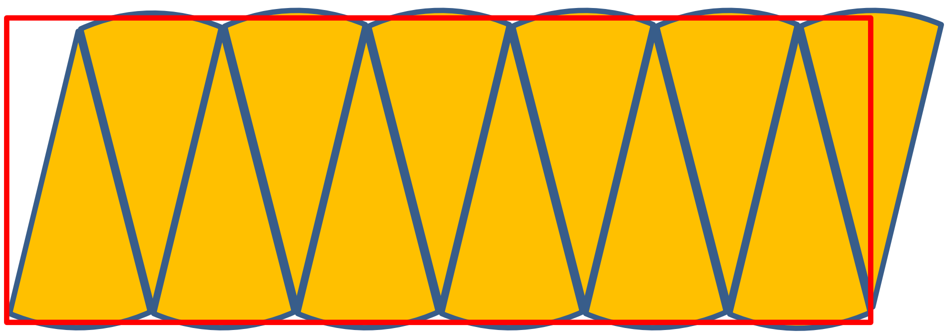
people.famouswhy.com




*Dalam pembuktiannya, Eudoxus juga menggunakan fakta bahwa luas segi-$2^n$ beraturan “yang memuat lingkaran” lebih kecil dari ($1 + 2^{2-n}$) kali luas lingkaran tersebut, selain fakta yang telah dibuktikan o/ Antiphon.

# Archimedes & Lingkaran

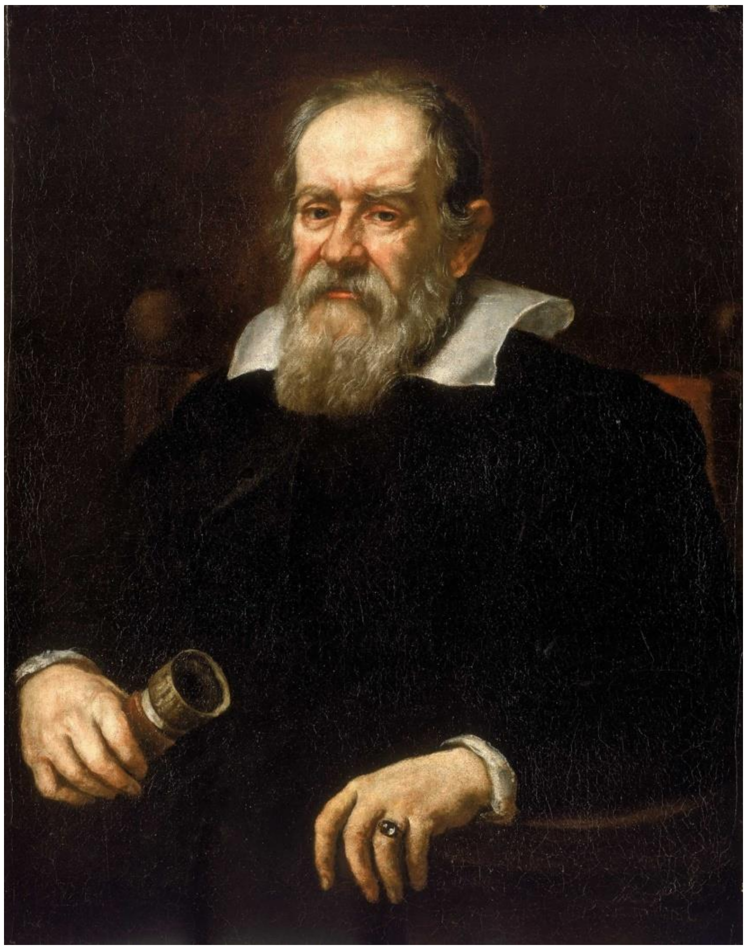
- Archimedes (~287-~212 SM) mem-buktikan bahwa luas lingkaran sama dengan ½ × keliling × jari-jari.



- Menggunakan segi-96, ia juga memperoleh taksiran π ≈ 22/7.

en.wikipedia.org

# Galileo Galilei (1564-1642)



**Galileo Galilei** adalah seorang astronom, fisikawan & matematikawan Italia yang terkenal dengan ucapannya "*Mathematics is the language of nature*." Selain terkenal karena teori heliosentris, ia juga punya andil pada konsep *infinite-simal* yang terkait dengan konsep ketakterhinggaan.

# Bab 4
# Sub-Barisan dan Barisan Cauchy

# 4.1 Definisi Sub-Barisan

Misalkan $\langle x_n \rangle$ barisan dan $\langle n_k \rangle$ barisan naik sejati dengan $n_k \in \mathbb{N}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Maka, barisan

$$\langle x_{n_k} \rangle$$

disebut sebagai **sub-barisan** dari $\langle x_n \rangle$.

<u>Catatan</u>. Hipotesis $\langle n_k \rangle$ barisan naik sejati memaksa $n_k \geq k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

**Contoh**: $x_2, x_4, x_6, \ldots$ merupakan sub-barisan dari $\langle x_n \rangle$. Pada contoh ini, $n_k = 2k$.

# Sifat Sub-Barisan dan Barisan 'Induk'-nya

Jika $\langle x_n \rangle$ terbatas, maka setiap sub-barisan darinya juga terbatas. Lebih jauh,

**Teorema**. *Jika $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L, maka setiap sub-barisan dari $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L.*

Bukti?

# CONTOH

Kita telah membahas kedivergenan barisan $\langle(-1)^n\rangle$. Bukti alternatif yang lebih sederhana dapat diberikan dengan menggunakan teorema sebelumnya.

Karena terdapat sub-barisan $\langle -1\rangle$ yang konvergen ke -1 dan sub-barisan $\langle 1\rangle$ yang konvergen ke 1, maka barisan $\langle(-1)^n\rangle$ tidak mungkin konvergen. (Jika ia konvergen, maka menurut teorema sebelumnya kedua sub-barisan di atas seharusnya konvergen ke bilangan yang sama.)

# CONTOH

Pada Sub-bab 3.4 ada contoh barisan $\langle x_n \rangle$ yang didefinisikan secara induktif untuk suatu *a* > 0 dengan $x_0 > 0$ dan

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

merupakan barisan monoton turun dan terbatas di bawah (oleh 0), sehingga $\langle x_n \rangle$ konvergen.

Sekarang misalkan limitnya adalah *L*. Maka, menurut teorema sebelumnya, $\langle x_{n+1} \rangle$ juga konvergen ke *L*. Akibatnya

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right),$$

sehingga $L^2 = a$. Namun $x_1 > 0$ mengakibatkan $x_n > 0$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$. Karena itu mestilah $L = \sqrt{a}$.

# SOAL

Diketahui barisan $\langle x_n \rangle$ didefinisikan secara induktif dengan $x_1 = 1$ dan

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mungkinkah $\langle x_n \rangle$ konvergen?

# 4.2 Teorema Bolzano-Weierstrass

**Teorema**. *Setiap barisan mempunyai sub-barisan yang monoton.*

**Teorema** (Bolzano-Weierstrass). *Setiap barisan terbatas mempunyai sub-barisan yang konvergen.*

Bukti?

# CONTOH

Barisan $\langle(-1)^n\rangle$ terbatas dan mempunyai dua sub-barisan yang konvergen, yaitu $\langle -1\rangle$ dan $\langle 1\rangle$.

# 4.3 Barisan Cauchy

Barisan $\langle x_n \rangle$ disebut **barisan Cauchy** apabila untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $m, n \geq N$ berlaku

$$|x_m - x_n| < \epsilon.$$

Secara intuitif, suku-suku pada barisan Cauchy mendekat dan makin mendekat satu sama lain.

**Proposisi**. *Jika* $\langle x_n \rangle$ *konvergen, maka* $\langle x_n \rangle$ *merupakan barisan Cauchy.*

**Proposisi**. *Jika* $\langle x_n \rangle$ *barisan Cauchy, maka* $\langle x_n \rangle$ *merupakan barisan terbatas.*

**Teorema.** *Jika* $\langle x_n \rangle$ *barisan Cauchy, maka* $\langle x_n \rangle$ *merupakan barisan konvergen.*

Bukti?

# CONTOH

Diketahui barisan $\langle x_n \rangle$ dengan $x_1 = 1, x_2 = 2$, dan

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), n \in \mathbb{N}.$$

Maka, dapat diperiksa bahwa untuk tiap $n \in \mathbb{N}$ kita mempunyai

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{1}{2^n}.$$

Dengan menggunakan Ketaksamaan Segitiga, kita peroleh untuk $m > n$

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Jadi $\langle x_n \rangle$ Cauchy, dan karenanya ia konvergen.

# 4.4 Barisan Divergen Sejati

Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan **divergen ke** $+\infty$ dan kita tuliskan $x_n \to \infty$ untuk $n \to \infty$ apabila untuk setiap $M > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga utk setiap $n \geq N$ berlaku $x_n > M$.

<u>Contoh</u>: Barisan Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, … divergen ke $+\infty$.

Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan **divergen ke** $-\infty$ dan kita tuliskan $x_n \to -\infty$ untuk $n \to \infty$ apabila untuk setiap $M > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $x_n < -M$.

# Teorema

(i) *Jika* $\langle x_n \rangle$ *naik dan tak terbatas (di atas), maka ia divergen ke* $+\infty$.

(ii) *Jika* $\langle x_n \rangle$ *turun dan tak terbatas (di bawah), maka ia divergen ke* $-\infty$.