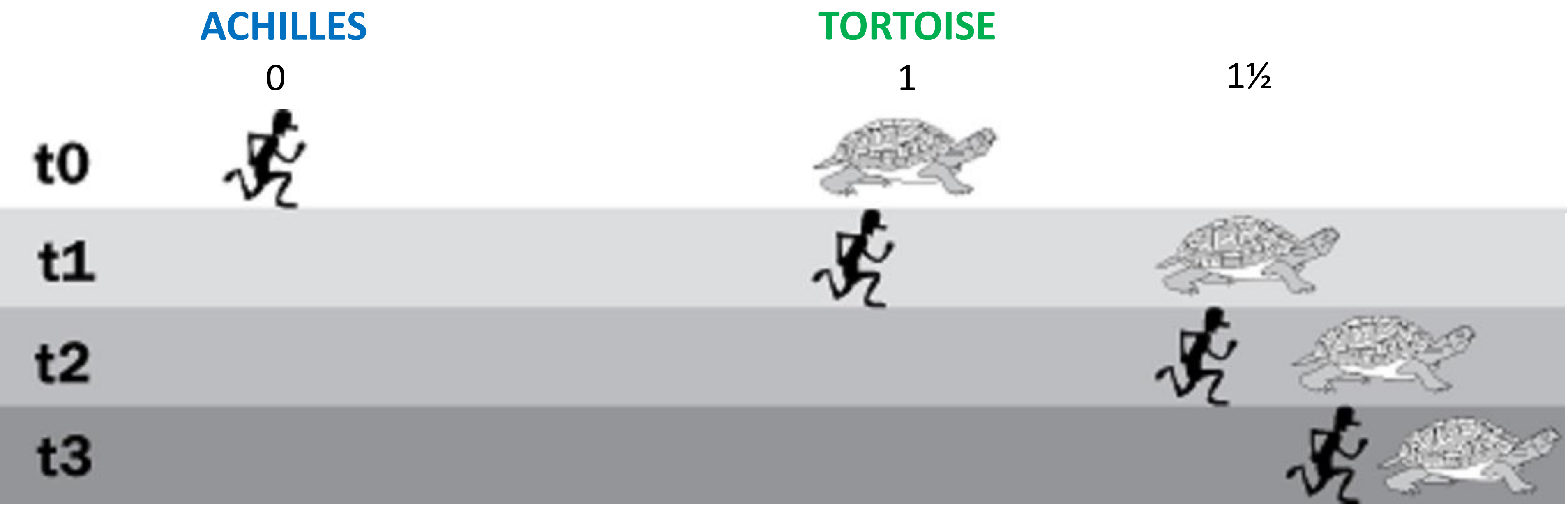
MA3231
Pengantar Analisis Real

Semester II, Tahun 2016-2017

Hendra Gunawan, Ph.D.

Bab 3
Barisan

Paradoks Zeno



Sumber: skeptic.com

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=?$$

Achilles Menang, Tentu Saja!

Bentuk penjumlahan tadi membentuk sebuah deret geometri. Jumlah n suku pertamanya sama dengan $2 - \frac{1}{2^n}$. Jadi, dalam cerita tadi, kita mempunyai sebuah `barisan' bilangan $\left\langle 2 - \frac{1}{2^n} \right\rangle$. Bila n `menuju tak terhingga', maka $\frac{1}{2^n}$ `menuju 0'. Jadi barisan bilangan di atas `konvergen ke 2'.

Dengan pengetahuan ini, pada akhirnya kita dapat menyimpulkan bahwa Achilles akan menyalip sang kura-kura setelah berlari selama 2 detik.

3.1 Definisi Barisan

Secara informal, sebuah **barisan** bilangan real dapat diartikan sebagai suatu daftar bilangan real $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Persisnya, sebuah barisan bilangan real adalah suatu aturan yang mengaitkan <u>setiap</u> bilangan asli n dengan sebuah bilangan real <u>tunggal</u> x_n. Di sini x_n disebut sebagai **suku ke**-*n* barisan tersebut.

Notasi $\langle x_n \rangle$ menyatakan barisan dengan suku ke-*n* sama dengan x_n. Himpunan $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ disebut sebagai **daerah nilai** barisan $\langle x_n \rangle$.

Barisan Terbatas

Barisan dikatakan $\langle x_n \rangle$ dikatakan **terbatas** / **terbatas di atas** / **terbatas di bawah** apabila daerah nilainya terbatas / terbatas di atas / terbatas di bawah.

Jadi, menurut Proposisi 2 pada Bab 1, $\langle x_n \rangle$ terbatas jika dan hanya jika terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga $|x_n| \leq K$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

CONTOH

1. Barisan $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ adalah barisan bilangan 1, ½, ⅓, ¼, … .
2. Barisan $\langle (-1)^n \rangle$ adalah barisan bilangan -1, 1, -1, 1, … .
3. Barisan yang didefinisikan secara rekursif dengan $x_1 = x_2 = 1$, dan $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, adalah barisan bilangan Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … .

3.2 Kekonvergenan Barisan

Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan **konvergen ke** L (L ϵ **R**) apabila untuk setiap ε > 0 terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga

$$\text{jika } n \geq N, \text{ maka } |x_n - L| < \varepsilon.$$

Bilangan L dalam hal ini disebut sebagai limit barisan $\langle x_n \rangle$ dan kita tuliskan

$$x_n \to L \ \text{ untuk } n \to \infty$$

atau

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L\,.$$

CONTOH

1. Barisan $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ konvergen ke 0.
2. Barisan $\langle (-1)^n \rangle$ **divergen**.
3. Barisan Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... juga **divergen**.

TEOREMA (Ketunggalan Limit Barisan)

Sebuah barisan tidak mungkin konvergen ke dua buah limit yang berbeda.

TEOREMA (Keterbatasan Barisan Konvergen)

Jika $\langle x_n \rangle$ *konvergen, maka* $\langle x_n \rangle$ *terbatas.*

3.3 Teorema Limit

Misalkan $x_n \to L$ *dan* $y_n \to M$ *untuk* $n \to \infty$*, dan* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$*. Maka*

(i) $\lambda x_n + \mu y_n \to \lambda L + \mu M$ *untuk* $n \to \infty$.

(ii) $x_n \cdot y_n \to LM$ *untuk* $n \to \infty$.

(iii) $x_n / y_n \to L/M$ *untuk* $n \to \infty$*, asalkan* $M \neq 0$.

Teorema Apit

Misalkan $x_n \leq y_n \leq z_n$ *untuk tiap* $n \in \mathbb{N}$.

Jika $x_n \to L$ *dan* $z_n \to L$ *untuk* $n \to \infty$,

maka $y_n \to L$ *untuk* $n \to \infty$.

SOAL

Buktikan jika $|x_n - L| \leq y_n$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$ dan $y_n \rightarrow 0$ bila $n \rightarrow \infty$, maka $x_n \rightarrow L$ bila $n \rightarrow \infty$.

3.4 Barisan Monoton

Salah satu jenis barisan yang mudah dipelajari kekonvergenannya adalah barisan monoton.

Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan **naik** apabila $x_n \leq x_{n+1}$ untuk tiap n ϵ **N**. Serupa dengan itu, $\langle x_n \rangle$ dikatakan **turun** apabila $x_n \geq x_{n+1}$ untuk tiap n ϵ **N**.

Barisan naik dan barisan turun disebut barisan **monoton**. (Jadi ada barisan **monoton naik** dan ada juga barisan **monoton turun**.)

Teorema

i. *Jika $\langle x_n \rangle$ naik dan terbatas di atas, maka ia konvergen ke sup $\{x_n : n \in N\}$.*
ii. *Jika $\langle x_n \rangle$ turun dan terbatas di bawah, maka ia konvergen ke inf $\{x_n : n \in N\}$.*