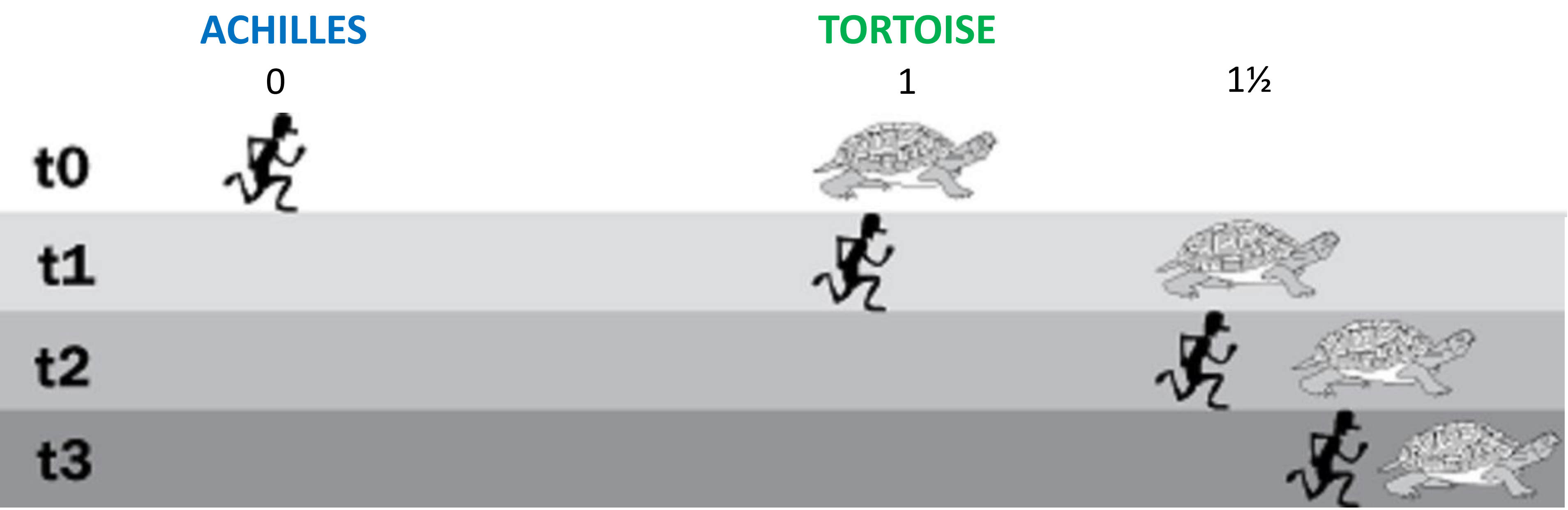
MA3231
Pengantar Analisis Real

Semester II, Tahun 2016-2017

Hendra Gunawan, Ph.D.

Bab 1
Sifat Kelengkapan Bilangan Real

1.1 Paradoks Zeno



Sumber: skeptic.com

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=?$$

Eksistensi $\sqrt{2}$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, kita dapat menentukan bilangan rasional $r > 0$ sedemikian sehingga $|r^2 - 2| < \varepsilon$, tetapi tidak ada bilangan rasional r yang memenuhi $r^2 = 2$.

Sifat Kelengkapan bilangan real dirumuskan untuk menutupi ketaklengkapan bilangan rasional.

Sebelum membahas Sifat Kelengkapan, kita perlu berkenalan dengan sejumlah istilah terlebih dahulu.

1.2 Himpunan Terbatas

Misalkan $H \subseteq \mathbf{R}$. Himpunan H dikatakan **terbatas di atas** apabila terdapat $M \in \mathbf{R}$ sedemikian sehingga $x \leq M$ untuk setiap $x \in H$.

Bilangan M yang memenuhi sifat ini (bila ada) disebut sebagai **batas atas** dari himpunan H.

Catatan. Jika M merupakan batas atas H, maka semua bilangan yang lebih besar daripada M juga merupakan batas atas dari H.

Himpunan H dikatakan **terbatas di bawah** apabila terdapat m ϵ **R** sedemikian sehingga m ≤ x untuk setiap x ϵ H.

Bilangan m yang memenuhi sifat ini (bila ada) disebut sebagai **batas bawah** dari H.

Catatan. Jika m merupakan batas bawah H, maka semua bilangan yang lebih kecil daripada m juga merupakan batas bawah dari H.

Himpunan H dikatakan **terbatas** apabila ia terbatas di atas dan terbatas di bawah.

CONTOH

1. Misal H = $\left\{\frac{1}{n} : n \in \ \mathbb{N}\right\}$. Himpunan ini terbatas di bawah (0 adalah salah satu batas bawahnya).

Himpunan ini juga terbatas di atas (1 adalah salah satu batas atasnya). Jadi H terbatas.

2. Tinjau P = $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Himpunan ini terbatas di bawah, tetapi tidak terbatas di atas.

PROPOSISI

Himpunan $H \subseteq \mathbf{R}$ terbatas jika dan hanya jika terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga $|x| \leq K$ untuk setiap $x \in H$.

Catatan. Proposisi di atas memberi tahu kita bahwa himpunan terbatas adalah himpunan yang termuat dalam suatu interval $[-K, K]$, untuk suatu $K > 0$.

Misalkan himpunan H terbatas dan M adalah suatu batas atas dari H. Bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ bilangan $M - \varepsilon$ bukan merupakan batas atas dari H (yakni, terdapat $x \in H$ sedemikian sehingga $x > M - \varepsilon$), maka M disebut sebagai **batas atas terkecil** dari H.

Serupa dengan itu, misalkan m adalah suatu batas bawah dari H. Bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ bilangan $m + \varepsilon$ bukan merupakan batas bawah dari H, maka m disebut sebagai **batas bawah terbesar** dari H.

CONTOH

Himpunan H = $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ mempunyai batas atas terkecil 1.

Untuk setiap ε > 0, bilangan 1 – ε tidak mungkin menjadi batas atas dari H, karena 1 ϵ H dan 1 > 1 – ε.

Batas bawah terbesarnya adalah 0, tetapi pada saat ini kita belum dapat membuktikannya!

1.3 Sifat Kelengkapan

Setiap himpunan bagian tak kosong dari **R** yang terbatas di atas mempunyai batas atas terkecil.

Setiap himpunan bagian tak kosong dari **R** yang terbatas di bawah mempunyai batas bawah terbesar.

Misalkan H $\neq \emptyset$. Jika H terbatas di atas, maka batas atas terkecil dari H disebut sebagai **supremum** H, ditulis **sup H**.

Untuk membuktikan bahwa **sup H = b**, kita perlu melakukan dua hal, yaitu membuktikan bahwa

(i) b merupakan batas atas dari H, dan

(ii) jika $\varepsilon > 0$, maka $b - \varepsilon$ bukan batas atas dari H.

Yang kedua meyakinkan kita bahwa tidak ada batas atas H yang lebih kecil daripada b.

Serupa dengan itu, jika H terbatas di bawah, maka batas bawah terbesar dari H disebut sebagai **infimum** H, ditulis **inf H**.

Untuk membuktikan bahwa **inf H = a**, kita perlu melakukan dua hal, yaitu membuktikan bahwa

(i) a merupakan batas bawah dari H, dan

(ii) jika $\varepsilon > 0$, maka $a + \varepsilon$ bukan batas bawah dari H.

Perhatikan bahwa inf H $\leq$ sup H.

Jika H tak terbatas di atas, kita tulis sup H = ∞.
Jika H tak terbatas di bawah, inf H = $-\infty$.

1.4 Manipulasi dengan Supremum dan Infimum

Misalkan H ⊆ **R** dan c ∊ **R**. Kita definisikan

$$cH := \{cx : x \in H\};$$
$$H + c := \{x + c : x \in H\}.$$

Proposisi. Misalkan H ⊆ **R** tak kosong dan terbatas di atas. Jika c > 0, maka cH terbatas di atas dan

sup cH = c sup H.

Jika c < 0, maka cH terbatas di bawah dan

inf cH = c sup H.

Bukti Proposisi (untuk $c > 0$)

Misalkan $v = \sup H$. Akan dibuktikan $\sup cH = cv$.

Ambil sembarang $y \in cH$. Maka $y = cx$ untuk suatu $x \in H$. Karena $x \leq v$ dan $c > 0$, maka $y = cx \leq cv$. Jadi cv merupakan batas atas dari cH.

Selanjutnya, ambil sembarang $\varepsilon > 0$. Maka, $v - \varepsilon/c$ bukan batas atas dari H. Karena itu, ada $x \in H$ sedemikian sehingga $x > v - \varepsilon/c$. Kalikan kedua ruas dengan c, kita peroleh $cx > cv - \varepsilon$. Ini berarti bahwa $cv - \varepsilon$ bukan batas atas dari cH.

Jadi, berdasarkan kedua pengamatan di atas, kita simpulkan bahwa $\sup cH = cv$. ☺

Proposisi. Misalkan $H \subseteq \mathbf{R}$ tak kosong dan terbatas di atas, dan $c \in \mathbf{R}$. Maka $H + c$ terbatas di atas dan

$$\sup (H + c) = (\sup H) + c.$$

SOAL:

Misalkan $H \subseteq \mathbf{R}$ tak kosong dan terbatas di atas, dan $G \subseteq H$ juga tak kosong. Buktikan bahwa G terbatas di atas dan $\sup G \leq \sup H$.