MA3231
Pengantar Analisis Real

Semester II, Tahun 2016-2017

Hendra Gunawan, Ph.D.

Tentang Mata Kuliah MA3231

- Mata kuliah ini merupakan mata kuliah **wajib** bagi mahasiswa program studi S1 Matematika, dengan bobot 4 SKS, yang merupakan dasar bagi kuliah-kuliah selanjutnya di bidang analisis.
- **Tujuan umum** mata kuliah ini adalah membuka wawasan peserta kuliah untuk lebih memahami sifat-sifat bilangan dan fungsi real, dan mampu menggunakan ide-ide abstrak dari kekontinuan, turunan dan integral Riemann, dan metode rigorous dari analisis real untuk menyelesaikan masalah dalam bidang matematika lainnya dan aplikasinya.

- Materi kuliah Pengantar Analisis Real meliputi bilangan real, barisan dan deret, fungsi, turunan fungsi dan integral Riemann.

- **Buku Rujukan**:
  1. **Hendra Gunawan**, *Pengantar Analisis Real*, Penerbit ITB, 2016 (buku utama)
  2. **K. G. Binmore**, *Mathematical Analysis*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1982 (buku pendamping)
  3. **R.G. Bartle and D.R. Sherbert**, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, 2000 (buku pendukung)

- **Evaluasi**: Ujian (3 x 30%) dan Kuis/Tugas (10%)

APA YANG ANDA LIHAT?

Bab -1 Logika dan Himpunan

-1.1 Kalimat Matematika dan Logika

- Setiap kalimat atau pernyataan matematika hanya bias benilai atau benar atau salah.
- Tabel Kebenaran P dan Q, P atau Q, $P \Rightarrow Q$

P	Q	P dan Q	P atau Q	$P \Rightarrow Q$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	S
S	B	S	B	B
S	S	S	S	B

- $P \Leftrightarrow Q$ jika dan hanya jika $P \Rightarrow Q$ dan $Q \Rightarrow P$.

-1.2 Kalimat Berkuantor

- "*Setiap … memenuhi …*" atau "*Untuk setiap …, terdapat … sehingga …* " merupakan kalimat berkuantor.
- Negasi dari "*Setiap bilangan asli n memenuhi pertaksamaan* $n^2 > n$" adalah

  "*Terdapat bilangan asli n sehingga* $n^2 \leq n$."

-1.3 Bukti dan Pembuktian

- Untuk membuktikan P $\Rightarrow$ Q atau "*Jika* P, *maka* Q" benar, misalkan P benar, lalu buktikan Q benar.
- Untuk membuktikan "*Setiap bilangan asli n memenuhi* … (P)", ambil bilangan asli n sembarang, lalu buktikan P berlaku.
- Ingat metode kontradiksi dan metode kontraposisi.

-1.4 Himpunan dan Notasinya

Himpunan adalah suatu kumpulan objek, dan objek dalam himpunan disebut sbg **anggota** himpunan tsb.

Himpunan biasanya dituliskan dengan huruf besar. Jika x adalah anggota H, kita tuliskan $x \in H$.

Ada 3 cara menuliskan himpunan, di antaranya adalah dengan notasi

$$\{x \in S : x \text{ memenuhi } P\}.$$

Himpunan G merupakan **himpunan bagian** dari H, ditulis $G \subseteq H$, apabila setiap anggota G merupakan anggota H.

$G = H$ jika dan hanya jika $G \subseteq H$ dan $H \subseteq G$.

Bab 0 Bilangan Real

0.1 Bilangan Real sebagai Bentuk Desimal

$$\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q} \supseteq \mathbb{Z} \supseteq \mathbb{N}$$

Setiap bilangan real dapat dituliskan dalam bentuk desimal, misalnya:

$$1 = 1.00000\ldots$$

$$\tfrac{1}{2} = 0.50000\ldots$$

$$\tfrac{1}{3} = 0.33333\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

0.2 Sifat Aljabar

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ memenuhi **Sifat Aljabar**, yang terkait dengan operasi penjumlahan dan perkalian padanya: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ merupakan **lapangan**.

$-a$ adalah **invers** atau **lawan** dari a (thd penjumlahan)

$1/a$ adalah **kebalikan** dari $a \neq 0$ (thd perkalian).

Hukum Pencoretan. Misalkan x, y, dan z bilangan real.

(i) Jika $x + z = y + z$, maka $x = y$.

(ii) Jika $xz = yz$ dan $z \neq 0$, maka $x = y$.

Soal. Buktikan bahwa $a \cdot 0 = 0$, $(-1) \cdot a = -a$, dan $-(-a) = a$.

0.3 Sifat Urutan

Terdapat $P \subseteq \mathbb{R}$ sedemikian sehingga:

- Jika $x, y \in P$, maka $x + y \in P$.
- Jika $x, y \in P$, maka $xy \in P$.
- Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku: atau $x \in P$, atau $x = 0$, atau $-x \in P$ (**Hukum Trikotomi**).

Anggota P disebut **bilangan positif**. Jika $x \in P$, kita tuliskan $x > 0$. Jika $a - b := a + (-b) \in P$, kita tuliskan $a > b$ atau $b < a$.

Teorema:

(i) Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$.

(ii) Jika $a > b$ dan $c \in \mathbb{R}$, maka $a + c > b + c$.

(iii) Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ac > bc$.

$1 > 0$

Bukti. Dalam Sifat Aljabar, $1 \neq 0$ merupakan unsur identitas perkalian. Menurut Hukum Trikotomi, tinggal ada dua kemungkinan: atau $1 < 0$ atau $1 > 0$.

Andaikan $1 < 0$. Tambahkan kedua ruas dengan -1, kita dapatkan $-1 > 0$. Akibatnya $1 = (-1)(-1) > 0$, bertentangan dengan pengandaian semula.

Jadi mestilah $1 > 0$. [QED]

0.4 Akar dan Persamaan Kuadrat

$$x^n = x \cdot x \ \cdots \cdot x \quad (n \text{ kali})$$

Untuk y ≥ 0, nilai x ≥ 0 yang memenuhi persamaan $y = x^n$ disebut **akar** ke-n dari *y* dan dilambangkan dengan

$$x = y^{1/n}.$$

Jika $r = m/n > 0$, maka

$$y = \ y^{m/n} = (y^m)^{1/n}.$$

Jika $r \in \mathbb{Q}$ dan $r < 0$, maka

$$y^r = \frac{1}{y^{-r}}.$$

Untuk $r = ½$, $y^r = \sqrt{y}$.

Ingat rumus akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$?

Tidak ada bilangan rasional x yang memenuhi persamaan $x^2 = 2$.

Bukti. Andaikan ada bilangan rasional $x = m/n$, dengan m, n bilangan bulat dan FPB(m,n) = 1, yang memenuhi persamaan $x^2 = 2$. Maka $m^2 = 2n^2$. Ini berarti bahwa m^2 genap, dan akibatnya m juga genap. Tulis $m = 2k$. Maka $4k^2 = 2n^2$, sehingga $n^2 = 2k^2$. Ini berarti bahwa n^2 genap, dan akibatnya n juga genap. Jadi FPB(m,n) ≥ 2, bertentangan dengan asumsi di atas. [QED]

Soal. Buktikan tidak ada bilangan real x yang memenuhi persamaan $x^2 = 3$.

0.5 Nilai Mutlak

Jika x adalah bilangan real, maka **nilai mutlak** dari x didefinisikan sebagai

$$|x| := \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Teorema. Untuk setiap bilangan real x berlaku

$-|x| \leq x \leq |x|$.

Ketaksamaan Segitiga. Untuk setiap bilangan real x dan y berlaku $|x + y| \leq |x|+|y|$.

Soal. Buktikan jika $a < x < b$ dan $a < y < b$, maka

$|x - y| < b - a$.