MA3231 Analisis Real

Hendra Gunawan*

*http://hgunawan82.wordpress.com

Analysis and Geometry Group
Bandung Institute of Technology
Bandung, INDONESIA

Program Studi S1 Matematika ITB, Semester II 2016/2017

BAB 8. FUNGSI KONTINU PADA INTERVAL

1. 8.1 Kekontinuan pada Interval

BAB 8. FUNGSI KONTINU PADA INTERVAL

1. 8.1 Kekontinuan pada Interval
2. 8.2 Sifat-sifat Fungsi Kontinu pada Interval

BAB 8. FUNGSI KONTINU PADA INTERVAL

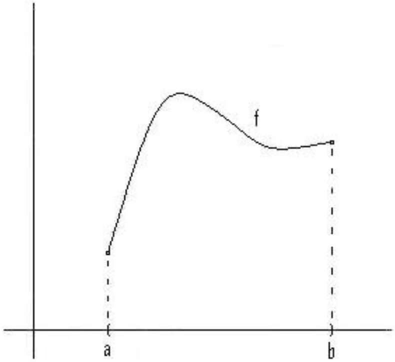
1. 8.1 Kekontinuan pada Interval
2. 8.2 Sifat-sifat Fungsi Kontinu pada Interval
3. 8.3 Lebih jauh tentang Fungsi Kontinu pada Interval

BAB 8. FUNGSI KONTINU PADA INTERVAL

1. 8.1 Kekontinuan pada Interval
2. 8.2 Sifat-sifat Fungsi Kontinu pada Interval
3. 8.3 Lebih jauh tentang Fungsi Kontinu pada Interval
4. 8.4 Kekontinuan Seragam

Fungsi f dikatakan **kontinu** pada suatu interval buka I jika dan hanya jika f kontinu di setiap titik pada I.

Secara geometris, f kontinu pada suatu interval apabila grafiknya tidak terputus pada interval tersebut.

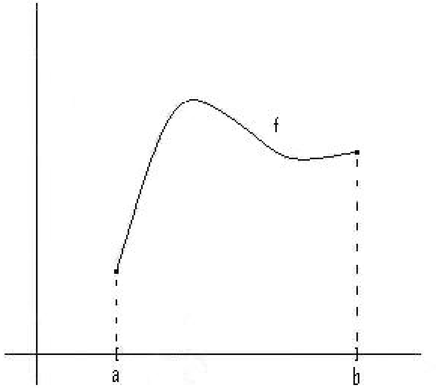


Gambar 8.1 Grafik fungsi kontinu pada interval buka

Selanjutnya, fungsi f dikatakan *kontinu* pada interval tutup $I = [a, b]$ jika dan hanya jika f kontinu di setiap titik $c \in (a, b)$, kontinu kanan di a, dan kontinu kiri di b.

Secara intuitif, f kontinu pada interval $[a, b]$ apabila kita dapat menggambar grafiknya dari titik $(a, f(a))$ ke titik $(b, f(b))$ tanpa harus mengangkat pena dari kertas. (Lihat Gambar 8.2.)

Walau demikian ada kasus di mana intuisi di atas tidak berlaku.



Gambar 8.2 Grafik fungsi kontinu pada interval tutup

Contoh 1. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ \frac{3}{2}, & x > 1 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa f kontinu di setiap titik kecuali di $c = 1$.

Namun f kontinu kiri di $c = 1$, dan karenanya f kontinu pada interval $[0, 1]$.

Karena f tidak kontinu kanan di $c = 1$, maka f tidak kontinu pada interval $[1, 2]$.

Proposisi 2. *Misalkan f terdefinisi pada suatu interval I. Maka, f kontinu pada I jika dan hanya jika, untuk setiap $x \in I$ dan setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

untuk $y \in I$ dengan $|x - y| < \delta$.

Contoh 3. (i) Fungsi $f(x) = px + q$ kontinu pada sebarang interval I.

(ii) Fungsi $g(x) = |x|$ kontinu pada sebarang interval I.

(iii) Fungsi $h(x) = \sqrt{x}$ kontinu pada sebarang interval $I \subseteq [0, \infty)$.

SOAL

Misalkan $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & 1 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Selidiki apakah f kontinu di setiap titik pada interval $[0, 5]$.

Selidiki kekontinuan f pada interval $[0, 1]$ dan pada interval $[1, 5]$.

Sketsalah grafiknya.

Sebagai akibat dari Proposisi 8 dan Teorema 10 yang telah dibahas pada Bab 7, kita mempunyai Proposisi 4 dan Proposisi 6 di bawah ini. Dengan kedua proposisi ini, perbendaharaan fungsi kontinu menjadi lebih banyak.

Proposisi 4. *Misalkan f dan g kontinu pada suatu interval I dan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Maka $\lambda f + \mu g$ dan fg kontinu pada I. Lebih jauh, jika $g \neq 0$, maka $\frac{f}{g}$ kontinu pada I.*

Contoh 5. (i) Setiap fungsi polinom kontinu pada sebarang interval.

(ii) Setiap fungsi rasional kontinu pada sebarang interval dalam daerah asalnya.

Sebagai contoh, $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinu pada $(0, \infty)$.

(iii) Fungsi $f(x) = x + \sqrt{x}$ kontinu pada sebarang interval $I \subseteq [0, \infty)$, karena $f_1(x) = x$ dan $f_2(x) = \sqrt{x}$ kontinu pada sebarang interval $I \subseteq [0, \infty)$.

Proposisi 6. *Misalkan $g : I \to J$ kontinu pada interval I dan $f : J \to \mathbb{R}$ kontinu pada interval J. Maka $f \circ g$ kontinu pada I.*

Contoh 7. (i) Fungsi $h(x) = |1 + x|$ kontinu pada sebarang interval, karena $f(x) = |x|$ dan $g(x) = 1 + x$ kontinu pada sebarang interval.

(ii) Fungsi $h(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ kontinu pada sebarang interval $I \subseteq [0, \infty)$.

Misalkan f adalah fungsi yang kontinu pada suatu interval.

Jika kita mengetahui nilainya pada bilangan rasional, maka dengan menggunakan Sifat Kepadatan Bilangan Rasional, kita dapat pula mengetahui nilai f pada bilangan irasional.

SOAL

Misalkan f kontinu pada suatu interval I dan untuk setiap bilangan rasional $r \in I$ berlaku $f(r) = r^2$. Buktikan bahwa $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in I$.

Sebagaimana telah disinggung dalam Bab 2, interval $[a, b]$ yang tertutup dan terbatas merupakan himpunan kompak di $\mathbb{R}$.

Sekarang kita akan mempelajari keistimewaan yang dimiliki oleh fungsi kontinu pada interval kompak $[a, b]$.

Teorema 8. *Misalkan f kontinu pada interval $[a, b]$. Maka $f([a, b])$ juga merupakan suatu interval kompak.*

Teorema ini merupakan konsekuensi dari beberapa teorema berikut.

Teorema 9. *Misalkan f kontinu pada suatu interval I. Maka daerah nilainya, yaitu $f(I)$, juga merupakan suatu interval.*

Teorema 10 (Teorema Nilai Antara). *Misalkan f kontinu pada suatu interval I yang memuat a dan b. Jika u terletak di antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka terdapat c di antara a dan b sedemikian sehingga $f(c) = u$.*

`Catatan`. Teorema 10 setara dengan Teorema 9. Oleh karena itu kita cukup membuktikan salah satu di antara mereka.

Bukti Teorema 10. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan $a < b$ dan $f(a) < u < f(b)$. Tinjau himpunan

$$H := \{x \in [a, b] \, : \, f(x) < u\}.$$

Jelas bahwa $H \neq \emptyset$ karena $a \in H$. Karena H juga terbatas, maka H mempunyai supremum, sebutlah $c = \sup H$. Di sini $a < c < b$. Selanjutnya tinggal membuktikan bahwa $f(c) = u$, dengan menunjukkan bahwa tidak mungkin $f(c) < u$ ataupun $f(c) > u$.

Andaikan $f(c) < u$. Karena f kontinu di c, maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $f\left(c + \frac{\delta}{2}\right) < u$ (?). Jadi $c + \frac{\delta}{2} \in H$. Ini bertentangan dengan fakta bahwa $c = \sup H$. Sekarang andaikan $f(c) > u$. Sekali lagi, karena f kontinu di c, maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $f(x) > u$ untuk $c - \delta < x \leq c$ (?). Jadi tidak ada satu pun anggota H pada interval $(c - \delta, c]$. Ini juga bertentangan dengan fakta bahwa $c = \sup H$. $\square$

Teorema 11. *Misalkan f kontinu pada interval $[a, b]$. Maka f terbatas pada $[a, b]$.*

Bukti. Misalkan f tak terbatas pada $[a, b]$. Maka terdapat suatu barisan $\langle x_n \rangle$ di $[a, b]$ sedemikian sehingga

$$|f(x_n)| \to +\infty \text{ untuk } n \to \infty. \tag{1}$$

Karena $\langle x_n \rangle$ terbatas, maka menurut Teorema Bolzano–Weierstrass terdapat suatu sub-barisan $\langle x_{n_k} \rangle$ yang konvergen ke suatu titik $c \in [a, b]$. Tetapi f kontinu di c, sehingga $f(x_{n_k}) \to f(c)$ untuk $k \to \infty$. Ini bertentangan dengan (1).

Jadi mestilah f terbatas pada $[a, b]$. □

Teorema 12. *Misalkan f kontinu pada interval $[a, b]$. Maka f mencapai nilai maksimum dan nilai minimum pada $[a, b]$.*

Bukti. Dari Teorema 11 kita tahu bahwa f terbatas pada $[a, b]$. Misalkan $v := \sup f([a, b])$. Konstruksi barisan $\langle x_n \rangle$ di $[a, b]$ dengan $f(x_n) \to v$ untuk $n \to \infty$. Karena $\langle x_n \rangle$ terbatas, terdapat sub-barisan $\langle x_{n_k} \rangle$ yang konvergen ke suatu titik $c \in [a, b]$.

Namun kekontinuan di c mengakibatkan $f(x_{n_k}) \to f(c)$ untuk $k \to \infty$. Jadi mestilah $v = f(c)$, dan ini berarti bahwa v merupakan nilai maksimum. Serupa dengan itu, f juga mencapai nilai minimumnya. □

Contoh 13. Persamaan $10x^7 - 13x^5 - 1 = 0$ mempunyai sebuah akar $c \in (-1, 0)$.

Untuk menunjukkannya, misalkan $f(x) = 10x^7 - 13x^5 - 1$. Maka, $f(-1) = 2$ dan $f(0) = -1$.

Karena f kontinu pada $[-1, 0]$ dan 0 terletak di antara $f(-1)$ dan $f(0)$, maka menurut Teorema Nilai Antara terdapat $c \in (-1, 0)$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$.

Bilangan c dalam hal ini merupakan akar persamaan di atas.

Contoh 14. Misalkan $f : [a, b] \to [a, b]$ kontinu pada $[a, b]$. Maka, terdapat $c \in [a, b]$ sedemikian sehingga $f(c) = c$. [Bilangan c demikian disebut sebagai *titik tetap* f.]

Perhatikan bahwa peta dari $[a, b]$ merupakan himpunan bagian dari $[a, b]$, sehingga $f(a) \geq a$ dan $f(b) \leq b$.

Sekarang tinjau $g(x) = f(x) - x,\ x \in [a, b]$. Karena f kontinu pada $[a, b]$, maka g juga kontinu pada $[a, b]$.

Namun $g(a) = f(a) - a \geq 0$ dan $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Menurut Teorema Nilai Antara, mestilah terdapat $c \in [a, b]$ sedemikian sehingga $g(c) = 0$. Akibatnya $f(c) = c$.

SOAL

Misalkan f kontinu pada suatu interval kompak I. Misalkan untuk setiap $x \in I$ terdapat $y \in I$ sedemikian sehingga

$$|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|.$$

Buktikan bahwa terdapat suatu $c \in I$ sedemikian sehingga $f(c) = 0$.

Proposisi 2 menyatakan bahwa suatu fungsi f kontinu pada sebuah interval I jika dan hanya jika untuk setiap $x \in I$ dan setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

untuk $y \in I$ dengan $|x - y| < \delta$.

Contoh pada halaman berikut memperlihatkan bahwa secara umum nilai δ bergantung pada ϵ dan x.

Contoh 16. Kita telah mengetahui bahwa $f(x) = \frac{1}{x}$ kontinu pada $(0, 1]$.

Diberikan $x \in (0, 1]$ dan $\epsilon > 0$ sebarang, kita dapat memilih $\delta = \min\{\frac{x}{2}, \frac{\epsilon x^2}{2}\}$ sedemikian sehingga untuk $y \in (0, 1]$ dengan $|x - y| < \delta$ berlaku

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x - y}{xy}\right| = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot |x - y| < \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{\epsilon x^2}{2} = \epsilon.$$

Perhatikan bahwa jika x menuju 0, maka δ akan menuju 0.

Dalam kasus tertentu, nilai δ hanya bergantung pada ϵ, tidak pada x. Hal ini terjadi pada, misalnya, $f(x) = px + q,\ x \in \mathbb{R}$, dengan $p \neq 0$.

Diberikan $\epsilon > 0$, kita dapat memilih $\delta = \frac{\epsilon}{|p|}$ sedemikian sehingga

$$|f(x) - f(y)| = |p| \cdot |x - y| < \epsilon$$

untuk $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $|x - y| < \delta$.

Kekontinuan $f(x) = px + q$ dalam hal ini merupakan kekontinuan 'seragam' pada $\mathbb{R}$.

Fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ dikatakan **kontinu seragam** pada I apabila untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

untuk $x, y \in I$ dengan $|x - y| < \delta$.

Perhatikan bahwa dalam definisi di atas x dan y muncul setelah δ, yang mengindikasikan bahwa δ tidak bergantung pada x (dan y).

Teorema 17. Fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ tidak kontinu seragam pada I jika dan hanya jika terdapat $\epsilon_0 > 0$ dan dua barisan $\langle x_n \rangle$ dan $\langle y_n \rangle$ di I sedemikian sehingga $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ dan $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Latihan.

Teorema pada halaman berikut menyatakan bahwa kekontinuan pada interval kompak merupakan kekontinuan seragam.

Teorema 18. Jika f kontinu pada $[a, b]$, maka f kontinu seragam pada $[a, b]$.

Bukti. Andaikan f tidak kontinu seragam pada $[a, b]$. Maka, menurut Teorema 17, terdapat $\epsilon_0 > 0$ dan dua barisan $\langle x_n \rangle$ dan $\langle y_n \rangle$ di $[a, b]$ sedemikian sehingga $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ dan $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\langle x_n \rangle$ terbatas di $[a, b]$, maka menurut Teorema Bolzano-Weierstrass terdapat sub-barisan $\langle x_{n_k} \rangle$ yang konvergen, sebutlah ke $c \in [a, b]$. Karena $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka sub-barisan $\langle y_{n_k} \rangle$ akan konvergen ke c juga.

Selanjutnya, karena f kontinu di c, maka $\langle f(x_{n_k}) \rangle$ dan $\langle f(y_{n_k}) \rangle$ konvergen ke $f(c)$. Akibatnya, $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$ untuk $k \to \infty$. Ini mustahil karena $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. □

SOAL

Contoh 16 memperlihatkan bahwa fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ **tampaknya** tidak kontinu seragam pada $(0, 1]$.

Buktikan bahwa ia **memang** tidak kontinu seragam pada $(0, 1]$ dengan menggunakan Teorema 17.