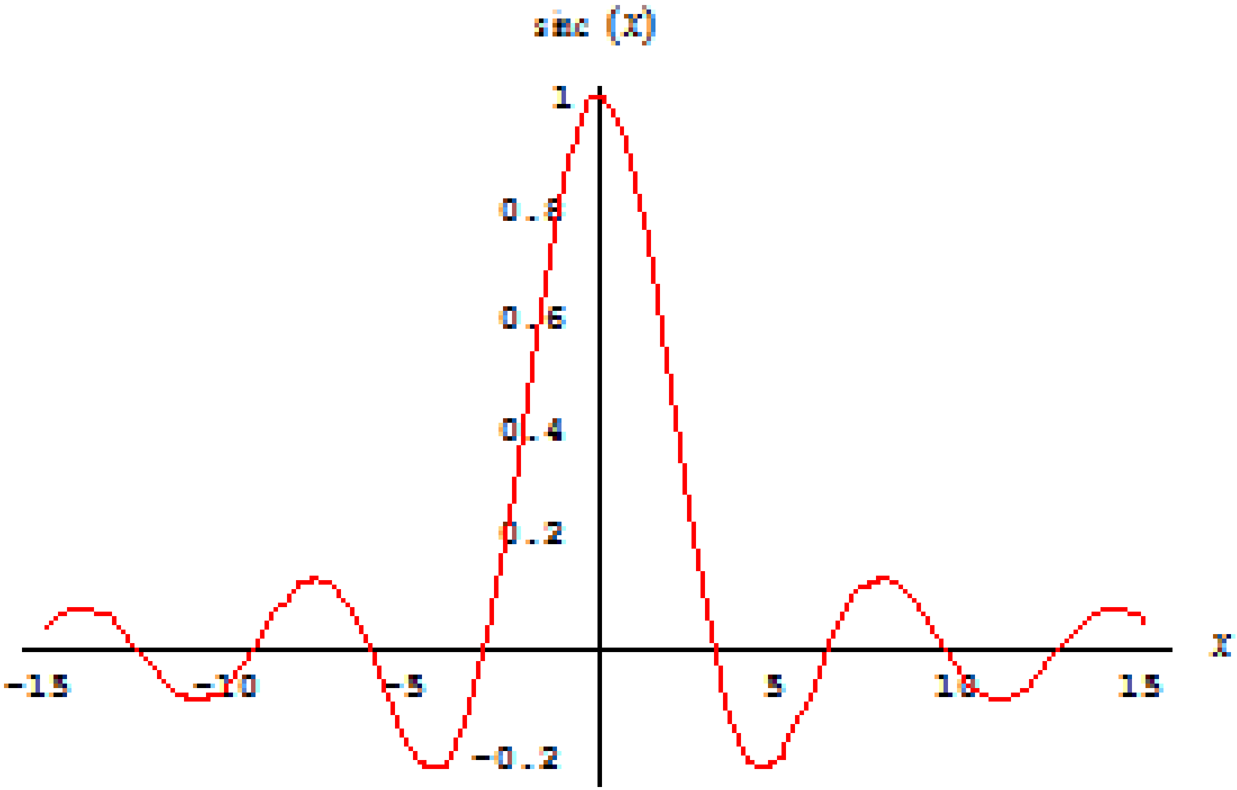
MA3231
Pengantar Analisis Real

Semester II, Tahun 2016-2017

Hendra Gunawan, Ph.D.

Bab 6
Fungsi



Rene Descartes (1596-1650)

Rene Descartes adalah seorang filsuf & matematikawan Perancis, penemu sistem koordinat Cartesius, yang terkenal dengan ucapannya "*Cogito ergo sum*." Karya utamanya adalah "*Discours de la méthode*" (1637) dan "*La geometrie*" (1637).

6.1 Fungsi dan Grafiknya

Sebuah **fungsi** dari himpunan *A* ke himpunan *B* adalah suatu <u>aturan</u> yang <u>mengaitkan</u> *setiap* $x \in A$ dengan sebuah elemen *tunggal* $y \in B$, ditulis

$$\begin{aligned} f\, :\ & A \to B \\ & x \mapsto y. \end{aligned}$$

Elemen *y* yang terkait dengan *x* disebut **peta** dari *x* (di bawah *f*), ditulis $y = f(x)$.

Bila $f(x)$ mempunyai rumus yang eksplisit, fungsi *f* sering di-nyatakan sebagai persamaan $y = f(x)$.

Grafik Fungsi

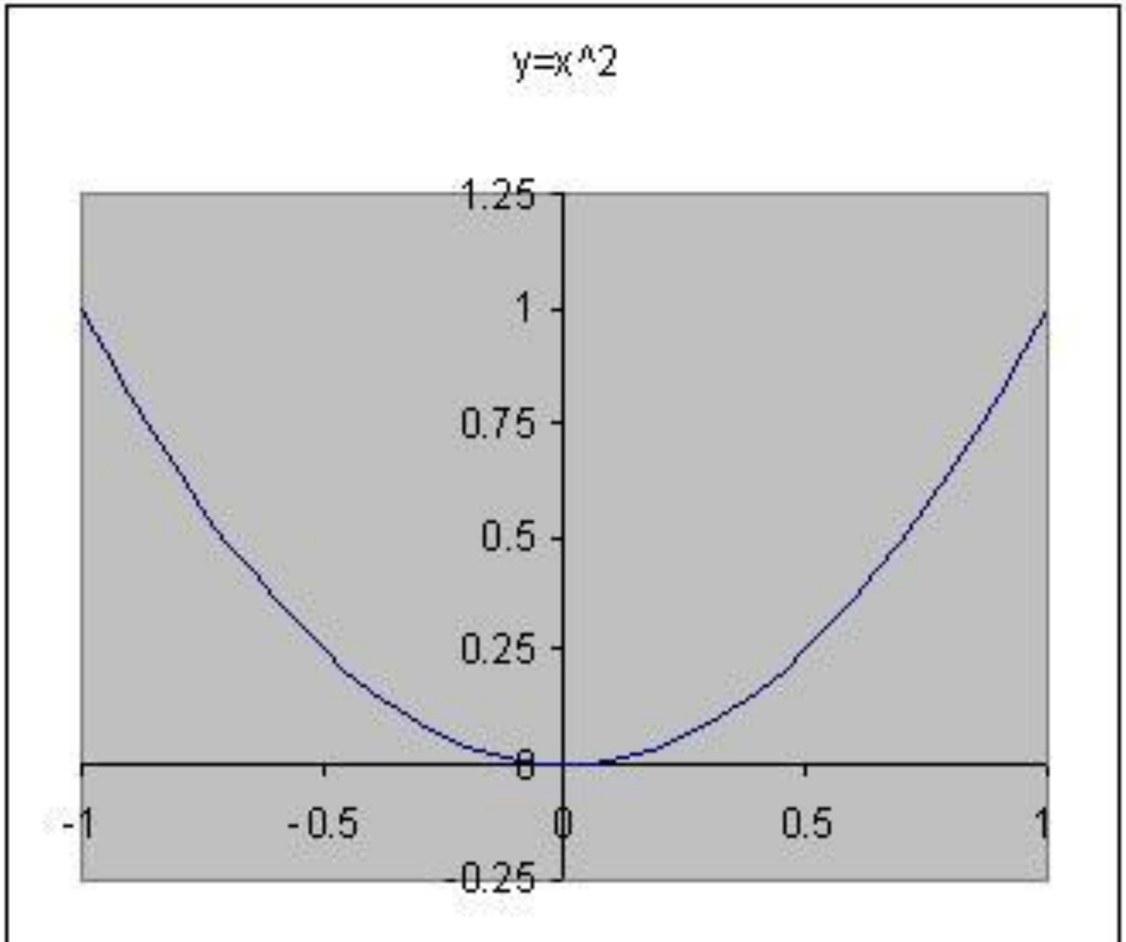
Dalam kuliah ini, kita membatasi pembahasan pada fungsi dari $A \subseteq \mathbb{R}$ ke $B \subseteq \mathbb{R}$, yakni **fungsi bernilai real** dengan **peubah real**.

Dalam hal ini, kita dapat menggambar **grafik fungsi** $f: A \to B$ sebagai **grafik persamaan** $y = f(x)$ pada **sistem koordinat Cartesius**.

Definisi fungsi menjamin bahwa setiap garis vertikal yang memotong *A* akan memotong grafik tepat pada *satu* titik (tidak boleh lebih).

Himpunan *A* biasanya merupakan himpunan ter-besar pada mana *f* terdefinisi, yang disebut sebagai **daerah asal** f.

Grafik Fungsi $y = x^2$



Daerah Asal, Peta, dan Daerah Nilai

Jika *f* adalah sebuah fungsi dari *A* ke *B* dan $H \subseteq A$, maka kita katakan bahwa *f* **terdefinisi** pada *H*.

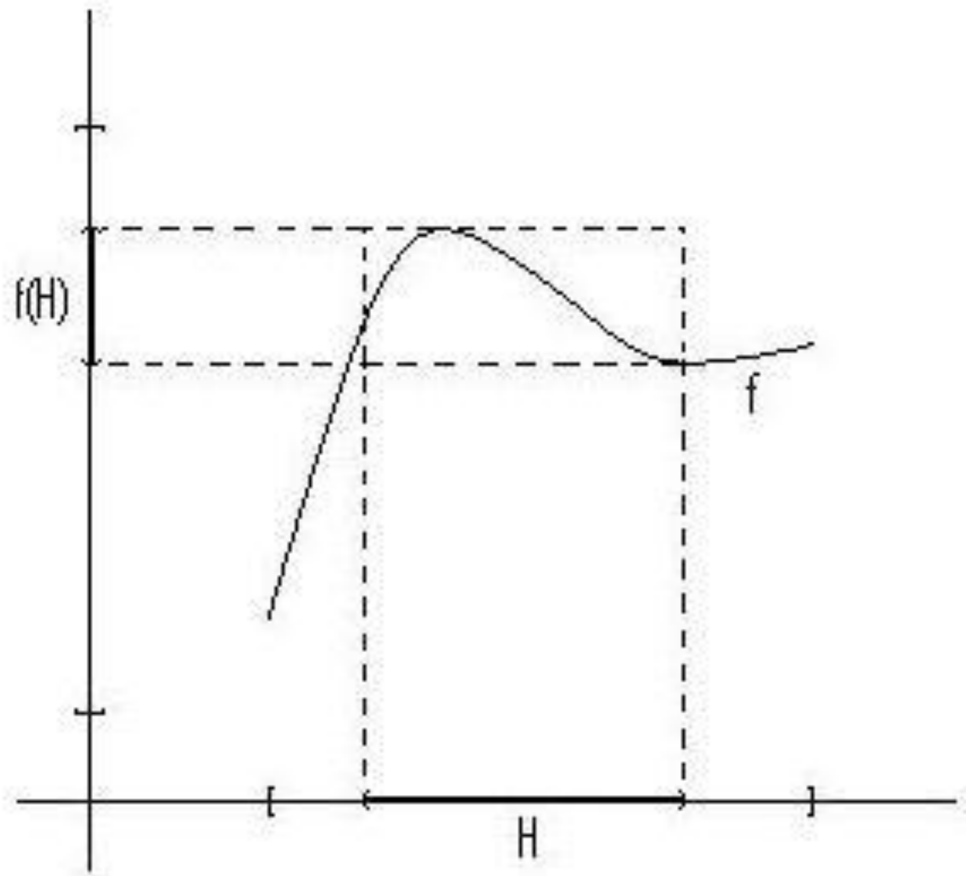
Jika *f* terdefinisi pada *H*, maka kita definisikan **peta dari** *H* **di bawah** *f* sebagai

$$f(H) := \{f(x) : x \in H\}.$$

Dalam hal $H = A$, himpunan $f(A)$ disebut sebagai **daerah nilai** *f*.

Catatan. $f(A)$ tidak harus sama dengan *B*.

Ilustrasi: Peta dari *H* di bawah *f*



SOAL

Gambar grafik himpunan semua titik (x, y) sedemikian sehingga

$$y = \begin{cases} 5, & jika\ x \geq 1, \\ 2, & jika\ x < 1. \end{cases}$$

Jelaskan mengapa grafik tersebut merupakan grafik sebuah fungsi **R** ke **R**.

Tentukan daerah nilainya.

Tentukan pula peta dari $[1, 2]$ di bawah fungsi tersebut.

6.2 Fungsi Polinom dan Fungsi Rasional

Misalkan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Fungsi $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ dengan koefisien $a_n \neq 0$ disebut fungsi **polinom** berderajat *n*. Daerah asal polinom apapun adalah **R**.

Fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dengan *P* dan *Q* polinom disebut **fungsi rasional**. Daerah asalnya adalah $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

Sebagai contoh, fungsi $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ adalah fungsi rasional, dengan daerah asal **R**.

6.3 Operasi pada Fungsi; Funsi Invers

Misalkan $f, g : A \to \mathbb{R}$. Kita definisikan

- **jumlah**:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad x \in A.$$

- **hasil kali dengan skalar**:

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x), \qquad x \in A.$$

- **hasil kali**:

$$(fg)(x) := f(x)g(x), \qquad x \in A.$$

- **hasil bagi**:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in A, g(x) \neq 0.$$

Fungsi Komposisi

Misalkan $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $g : A \to B$, dan $f : B \to \mathbb{R}$. Kita definisikan fungsi **komposisi** $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ sebagai

$$(f \circ g)(x) \coloneqq f\big(g(x)\big), \qquad x \in A.$$

Perhatikan bahwa utk setiap $x \in A$, kita mempunyai

$$x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x)).$$

Di sini fungsi g beroperasi terlebih dahulu terhadap x, dan setelah itu fungsi f beroperasi terhadap $g(x)$.

Fungsi Invers (1)

Misalkan *A* dan *B* adalah himpunan dan *f* adalah fungsi dari *A* ke *B*. Ini berarti bahwa bahwa *setiap* anggota $a \in A$ mempunyai sebuah peta *tunggal* $b = f(a) \in B$.

Kita sebut f^{-1}fungsi **invers** dari *f* apabila f^{-1} merupakan fungsi dari B ke A dengan sifat

$$x = f^{-1}(y) \text{ jika dan hanya jika } y = f(x).$$

Tidak semua fungsi mempunyai fungsi invers.

Fungsi Invers (2)

Dari definisi tadi jelas bahwa $f: A \to B$ mempunyai fungsi invers $f^{-1}: B \to A$ jika dan hanya jika *setiap* $b \in B$ merupakan peta dari sebuah anggota *tunggal* $a \in A$. Fungsi dengan sifat ini disebut sebagai suatu **korespondensi 1-1** antara *A* dan *B*.

Dari grafiknya, $f: A \to B$ merupakan korespondensi 1-1 antara *A* dan *B* jika dan hanya jika setiap garis vertikal yang memotong *A* juga memotong grafik *f* tepat pada sebuah titik *dan* setiap garis horisontal yang memotong *B* juga akan memotong grafik *f* tepat pada sebuah titik.

SOAL

Misalkan $f : [0,1] \to [0,1]$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \qquad 0 \le x \le 1,$$

dan $g: [0,1] \to [0,1]$ didefinisikan sebagai

$$g(x) = 4x - 4x^2, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Tentukan aturan untuk $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Apakah mereka sama?

6.4 Fungsi Terbatas

Misalkan f terdefinisi pada H. Kita katakan bahwa f **terbatas di atas** pada H oleh suatu batas atas M apabila untuk tiap $x \in H$ berlaku

$$f(x) \leq M.$$

Ini setara dengan mengatakan bahwa himpunan

$$f(H) = \{f(x) : x \in H\}$$

terbatas di atas oleh M.

Nilai Maksimum Fungsi

Jika f terbatas di atas pada H, maka menurut Sifat Kelengkapan $f(H)$ mempunyai supremum. Misalkan

$$M := \sup_{x \in H} f(x) = \sup f(H).$$

Secara umum, belum tentu terdapat $c \in H$ sehingga $f(c) = M$. Jika terdapat $c \in H$ sehingga $f(c) = M$, maka M disebut sebagai **nilai maksimum** f pada H dan nilai maksimum ini *tercapai* di c.

Fungsi **terbatas di bawah** dan **nilai minimum** didefinisikan secara analog.

Fungsi Terbatas

Fungsi yang terbatas di atas dan terbatas di bawah disebut fungsi **terbatas** (pada daerah asalnya).

Menurut proposisi, f terbatas pada A jika dan hanya jika terdapat $K > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(x)| \leq K, \qquad x \in A.$$

SOAL

Selidiki apakah fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

terbatas serta mencapai nilai maksimum dan minimumnya.