

MA3231 Analisis Real

Hendra Gunawan*



*<http://hgunawan82.wordpress.com>

Analysis and Geometry Group
Bandung Institute of Technology
Bandung, INDONESIA

Program Studi S1 Matematika ITB, Semester II 2016/2017

BAB 15. INTEGRAL SEBAGAI LIMIT

1 15.1 Jumlah Riemann

BAB 15. INTEGRAL SEBAGAI LIMIT

1 15.1 Jumlah Riemann

2 15.2 Integral sebagai Limit

Dalam perkuliahan Kalkulus pada tahun pertama, integral Riemann biasanya diperkenalkan sebagai limit dari 'jumlah Riemann', tidak melalui integral Riemann atas dan integral Riemann bawah.

Hal ini memang dimungkinkan untuk fungsi yang terintegralkan, karena nilai limit dari jumlah Riemann tersebut sama dengan integral Riemann yang kita bahas pada Bab 13.

Seperti pada bab sebelumnya, sepanjang bab ini I menyatakan interval $[a, b]$, kecuali bila dinyatakan lain.

Misalkan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ terbatas dan $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partisi dari I .

Jika t_k adalah bilangan sedemikian sehingga $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$ untuk $k = 1, 2, \dots, n$, maka jumlah

$$S(P, f) := \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

disebut sebagai suatu *jumlah Riemann* untuk f , yang terkait dengan partisi P dan *titik-titik sampel* t_k .

Catat bahwa untuk sebuah partisi P terdapat tak terhingga banyaknya cara memilih titik-titik sampel t_k , dan karenanya terdapat tak terhingga banyaknya jumlah Riemann yg terkait dengan partisi P .

Untuk fungsi $f \geq 0$ pada I , jumlah Riemann dapat diinterpretasikan sebagai jumlah luas daerah persegi panjang dengan lebar $x_k - x_{k-1}$ dan tinggi $f(t_k)$.

Jika partisi P cukup halus, maka masuk akal untuk mengharapkan bahwa jumlah Riemann $S(P, f)$ akan menghampiri luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$.

Dalam hal ini, nilai $S(P, f)$ mestilah cukup dekat ke nilai integral dari f pada I , bila f terintegralkan pada I .

Perhatikan bahwa untuk sembarang partisi P dari I dan untuk sembarang pemilihan titik sampel $t_k \in I_k := [x_{k-1}, x_k]$, kita mempunyai

$$m_k \leq f(t_k) \leq M_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

dengan $m_k := \inf f(I_k)$ dan $M_k := \sup f(I_k)$. Akibatnya,

$$\sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n f(t_k) (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}),$$

yakni

$$L(P, f) \leq S(P, f) \leq U(P, f).$$

Jadi, jumlah Riemann untuk f senantiasa bernilai di antara jumlah Riemann bawah dan jumlah Riemann atas, terlepas dari bagaimana caranya kita memilih titik-titik sampel t_k .

Catat khususnya jika batas bawah m_k dan batas atas M_k tercapai oleh f pada $[x_{k-1}, x_k]$ untuk tiap $k = 1, 2, \dots, n$, maka jumlah Riemann bawah dan jumlah Riemann atas sama dengan jumlah Riemann untuk titik-titik sampel tertentu.

Secara umum, jumlah Riemann bawah maupun atas bukan jumlah Riemann (karena nilai m_k dan M_k tidak harus tercapai oleh f).

Namun demikian, dengan memilih titik-titik sampel secara cermat, kita dapat memperoleh jumlah Riemann yang cukup dekat ke jumlah Riemann bawah atau ke jumlah Riemann atas. Lihat Soal Latihan no. 2.

SOAL

- ① Misalkan $f(x) = x$, $x \in [0, b]$. Untuk sembarang partisi $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dari $[0, b]$, pilih titik-titik sampel $t_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k-1})$. Hitunglah jumlah Riemann $S(P, f)$ dengan titik-titik sampel ini.
- ② Misalkan $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ terbatas, $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ partisi dari I , dan $\epsilon > 0$ sembarang.

- ① Tentukan titik-titik sampel t_k sedemikian sehingga

$$\sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) - L(P, f) < \epsilon.$$

- ② Tentukan titik-titik sampel t_k sedemikian sehingga

$$U(P, f) - \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) < \epsilon.$$

Di sini kita akan melihat bahwa $\int_a^b f(x) dx$ dapat dipandang sebagai 'limit' dari jumlah Riemann $S(P, f)$, dalam arti tertentu.

Teorema 1. *Misalkan f terintegralkan pada I . Maka, untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat suatu partisi P_ϵ dari I sedemikian sehingga untuk sembarang partisi $P \supseteq P_\epsilon$ dan sembarang jumlah Riemann $S(P, f)$ berlaku*

$$\left| S(P, f) - \int_a^b f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Bukti. Diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, pilih partisi P_ϵ dari I sedemikian sehingga

$$U(P_\epsilon, f) - L(P_\epsilon, f) < \epsilon.$$

Selanjutnya ambil sembarang partisi $P \supseteq P_\epsilon$. Maka, menurut Proposisi 1 pada Sub-bab 13.1, kita mempunyai

$$L(P_\epsilon, f) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq U(P_\epsilon, f).$$

Akibatnya,

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon.$$

Sekarang misalkan $S(P, f)$ adalah sembarang jumlah Riemann yang terkait dengan P . Maka,

$$L(P, f) \leq S(P, f) \leq U(P, f).$$

Sementara itu, kita juga mempunyai

$$L(P, f) \leq \int_a^b f(x) dx \leq U(P, f).$$

Dari kedua ketaksamaan ini kita peroleh

$$\left| S(P, f) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq U(P, f) - L(P, f) < \epsilon,$$

dan teorema pun terbukti. □

Teorema berikut merupakan kebalikan dari Teorema 1. Buktinya diserahkan sebagai latihan.

Teorema 2. *Misalkan f terbatas pada I . Misalkan terdapat suatu bilangan $A \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat partisi P_ϵ dari I sedemikian sehingga untuk sembarang partisi $P \supseteq P_\epsilon$ dan sembarang jumlah Riemann $S(P, f)$ berlaku*

$$|S(P, f) - A| < \epsilon.$$

Maka f terintegralkan pada I dan

$$\int_a^b f(x) dx = A.$$

SOAL

- ① Buktikan Teorema 2.
- ② Misalkan $f(x) = x$, $x \in [0, b]$. Gunakan Teorema 1 dan Soal Latihan 15.1 No. 1 untuk menyimpulkan bahwa $\int_0^b x \, dx = \frac{1}{2}b^2$.
- ③ Gunakan Teorema 1 untuk memberikan bukti alternatif untuk Teorema Dasar Kalkulus II (Teorema 7 pada Sub-bab 14.2).