

MA3231 Analisis Real

Hendra Gunawan*



*<http://hgunawan82.wordpress.com>

Analysis and Geometry Group
Bandung Institute of Technology
Bandung, INDONESIA

Program Studi S1 Matematika ITB, Semester II 2016/2017

BAB 11. FUNGSI MONOTON

1 11.1 Definisi dan Limit Fungsi Monoton

BAB 11. FUNGSI MONOTON

- 1 11.1 Definisi dan Limit Fungsi Monoton
- 2 11.2 Fungsi Monoton yang Mempunyai Turunan

BAB 11. FUNGSI MONOTON

- 1 11.1 Definisi dan Limit Fungsi Monoton
- 2 11.2 Fungsi Monoton yang Mempunyai Turunan
- 3 11.3 Invers Fungsi Monoton

Misalkan f terdefinisi pada suatu himpunan H . Kita katakan bahwa f *naik* pada H apabila untuk setiap $x, y \in H$ dengan $x < y$ berlaku

$$f(x) \leq f(y).$$

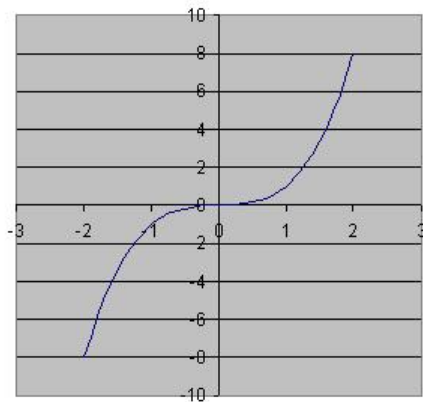
Jika ketaksamaan $<$ berlaku, maka kita katakan bahwa f *naik sejati* pada H .

Definisi serupa dapat dirumuskan untuk fungsi *turun* dan *turun sejati* pada H .

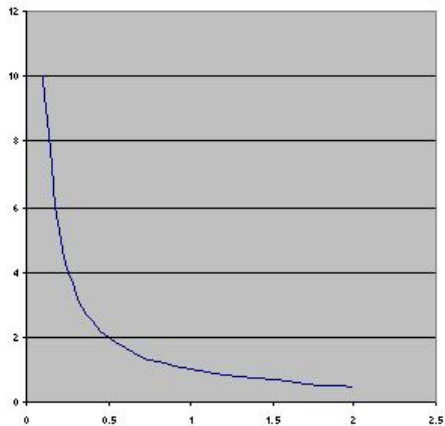
Fungsi naik atau turun disebut fungsi *monoton*. Fungsi yang naik dan turun sekaligus pada H mestilah konstan pada H .

Contoh 1. (i) Fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $f(x) = x^3$ merupakan fungsi naik sejati pada $\mathbb{R}$.

(ii) Fungsi $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $g(x) = \frac{1}{x}$ merupakan fungsi turun sejati pada $(0, \infty)$.



Gambar 11.1(i) Grafik fungsi $f(x) = x^3$



Gambar 11.1(ii) Grafik fungsi $g(x) = \frac{1}{x}$

Proposisi 2. *Jika f naik pada $[a, b]$, maka f mencapai nilai minimum di a dan nilai maksimum di b .*

Bukti. Misalkan $a < x < b$. Maka menurut definisi kita mempunyai

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Jadi f mencapai nilai minimum di a dan nilai maksimum di b . □

Sekarang kita akan membahas limit fungsi monoton. Persisnya, kita akan membuktikan bahwa fungsi monoton mempunyai limit kiri dan limit kanan di setiap titik.

Untuk itu, kita perkenalkan notasi

$$f(c-) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

dan

$$f(c+) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x),$$

asalkan kedua limit ini ada.

Contoh 3. (i) Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ \frac{3}{2}, & x > 1 \end{cases}$$

Maka, $f(1-) = 1 = f(1)$, sedangkan $f(1+) = \frac{3}{2}$.

(ii) Fungsi $f(x) = \lfloor x \rfloor$ mempunyai limit kiri dan limit kanan di setiap titik. Jika $n \in \mathbb{Z}$, maka $f(n-) = n - 1$ dan $f(n+) = n$.

Teorema 4. (i) *Jika f naik dan terbatas di atas pada (a, b) , maka*

$$f(b-) = \sup_{x \in (a, b)} f(x).$$

(ii) *Jika f naik dan terbatas di bawah pada (a, b) , maka*

$$f(a+) = \inf_{x \in (a, b)} f(x).$$

Bukti. (i) Misalkan $M = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$. Diberikan $\epsilon > 0$ sembarang, kita harus mencari suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $b - \delta < x < b$, maka $|f(x) - M| < \epsilon$ atau $M - \epsilon < f(x) < M + \epsilon$.

Ketaksamaan $f(x) < M + \epsilon$ selalu terpenuhi karena M merupakan batas atas untuk f pada (a, b) .

Selanjutnya, karena $M - \epsilon$ bukan merupakan batas atas untuk f pada (a, b) , maka terdapat suatu $y \in (a, b)$ sedemikian sehingga $M - \epsilon < f(y)$.

Namun f naik pada (a, b) , sehingga untuk setiap x yang memenuhi $y < x < b$ berlaku

$$M - \epsilon < f(y) \leq f(x).$$

Jadi, pilihlah $\delta = b - y$.

(ii) Serupa dengan (i).

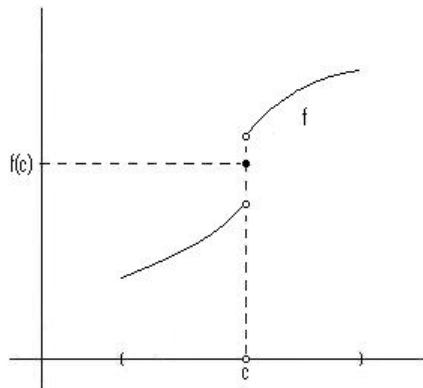


Akibat 5. Misalkan f naik pada (a, b) . Jika $c \in (a, b)$, maka $f(c-)$ dan $f(c+)$ ada, dan

$$f(x) \leq f(c-) \leq f(c) \leq f(c+) \leq f(y)$$

untuk $a < x < c < y < b$.

Catatan. Akibat 5 memberi tahu kita bahwa ketakkontinuan fungsi monoton (bila terjadi) mestilah merupakan ketakkontinuan loncat.



Gambar 11.2 Kasus $f(c-) < f(c) < f(c+)$

SOAL

- ❶ Buktikan jika f turun dan terbatas di bawah pada (a, b) , maka

$$f(b-) = \inf_{x \in (a, b)} f(x).$$

- ❷ Buktikan jika f dan g naik (sejati) pada H , maka $f + g$ naik (sejati) pada H .
- ❸ Diketahui $f(x) > 0$ untuk setiap $x \in H$, dan $g := \frac{1}{f}$. Buktikan jika f naik (sejati) pada H , maka g turun (sejati) pada H .

Pada bagian ini kita akan membahas bagaimana kita dapat menyelidiki kemonotonan suatu fungsi melalui turunannya, bila fungsi tersebut mempunyai turunan. Persisnya, kita mempunyai teorema berikut.

Teorema 6. *Misalkan f kontinu pada $[a, b]$ dan mempunyai turunan pada (a, b) .*

- (i) *Jika $f'(x) \geq 0$ untuk tiap $x \in (a, b)$, maka f naik pada $[a, b]$. Jika $f'(x) > 0$ untuk tiap $x \in (a, b)$, maka f naik sejati pada $[a, b]$.*
- (ii) *Jika $f'(x) \leq 0$ untuk tiap $x \in (a, b)$, maka f turun pada $[a, b]$. Jika $f'(x) < 0$ untuk tiap $x \in (a, b)$, maka f turun sejati pada $[a, b]$.*

Bukti. (i) Misalkan x dan y bilangan sembarang di $[a, b]$ dengan $x < y$. Maka f memenuhi hipotesis Teorema Nilai Rata-rata pada $[x, y]$ dan karenanya

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

untuk suatu $c \in (x, y)$. Jika $f'(t) \geq 0$ untuk tiap $t \in (a, b)$, maka $f'(c) \geq 0$ dan karenanya $f(x) \leq f(y)$. Jadi f naik pada $[a, b]$.

Jika $f'(t) > 0$ untuk tiap $t \in (a, b)$, maka $f'(c) > 0$ dan karenanya $f(x) < f(y)$. Jadi f naik sejati pada $[a, b]$.

(ii) Serupa dengan (i). □

Contoh 7. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) = x(1 - x)$. Turunannya adalah

$$f'(x) = 1 - 2x.$$

Jadi $f'(x) \geq 0$ untuk $x \leq \frac{1}{2}$ dan $f'(x) \leq 0$ untuk $x \geq \frac{1}{2}$.

Dengan demikian f naik pada $(-\infty, \frac{1}{2}]$ dan turun pada $[\frac{1}{2}, \infty)$.

SOAL

- 1 Misalkan $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa fungsi $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = (x + 1)^{1/n} - x^{1/n}$$

merupakan fungsi turun pada $[0, \infty)$.

- 2 Misalkan f mempunyai turunan dan naik pada suatu interval terbuka I . Buktikan bahwa $f'(x) \geq 0$ untuk tiap $x \in I$. Jika f naik sejati pada I , apakah dapat disimpulkan bahwa $f'(x) > 0$ untuk tiap $x \in I$? Jelaskan.

Menurut Soal 11.1 No. 5, fungsi f yang naik sejati pada A mendefinisikan suatu korespondensi 1-1 antara A dan $B := f(A)$. Dalam hal ini f akan mempunyai invers f^{-1} . Lebih jauh, f^{-1} naik sejati pada B .

Dalam kasus di mana f kontinu dan daerah asal f merupakan interval, sebutlah I , maka daerah nilainya juga merupakan suatu interval, sebutlah $J = f(I)$ (Teorema 10 pada Bab 8).

Lebih jauh, kita mempunyai teorema berikut.

Teorema 8. Misalkan $f : I \rightarrow J$ dengan I interval dan $J = f(I)$. Jika f naik sejati dan kontinu pada I , maka $f^{-1} : J \rightarrow I$ kontinu pada J .

Bukti. Andaikan f^{-1} tidak kontinu di suatu titik $d \in J$. Asumsikan bahwa d bukan titik ujung J . Maka, mengingat f^{-1} naik sejati pada J , $f^{-1}(d-)$ dan $f^{-1}(d+)$ ada, dan $f^{-1}(d-) < f^{-1}(d+)$. Sekarang misalkan $c \in I$ sedemikian sehingga

$$f^{-1}(d-) < c < f^{-1}(d+) \text{ dan } c \neq f^{-1}(d).$$

Karena itu $f(c)$ tidak terdefinisi (buatlah ilustrasinya!), dan ini bertentangan dengan hipotesis bahwa f terdefinisi pada I . □

Teorema 9. Misalkan I dan J interval, I° dan J° interval terbuka yang mempunyai titik ujung sama dengan titik ujung I dan J . Misalkan $f : I \rightarrow J$ kontinu dan $J = f(I)$. Jika f mempunyai turunan pada I° dan $f'(x) > 0$ untuk tiap $x \in I^\circ$, maka $f^{-1} : J \rightarrow I$ ada dan kontinu pada J serta mempunyai turunan pada J° dengan

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

untuk tiap $y \in J^\circ$ dan $x = f^{-1}(y)$.

SOAL

- 1 Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) = 1 + x + x^3$.
Tunjukkan bahwa f mempunyai invers dan hitunglah nilai $(f^{-1})'(-1)$.
- 2 Berikan sebuah contoh fungsi $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ yang naik sejati dan kontinu pada A , tetapi f^{-1} tidak kontinu pada $B = f(A)$.
(*Petunjuk.* Himpunan A tentunya bukan suatu interval.)