MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2016/2017

3 Maret 2017

Kuliah yang Lalu

10.1-2 Parabola, Elips, dan Hiperbola

10.4 Persamaan Parametrik Kurva di Bidang

10.5 Sistem Koordinat Polar

11.1 Sistem Koordinat Cartesius di $\mathbf{R}^3$

11.2-4 Vektor, Hasilkali Titik, Hasilkali Silang

11.5 Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva

11.6 Garis dan Garis Singgung di Ruang

11.8 Permukaan di Ruang

Kuliah Hari Ini

10.1-2 Parabola, Elips, dan Hiperbola

10.4 Persamaan Parametrik Kurva di Bidang

10.5 Sistem Koordinat Polar

11.1 Sistem Koordinat Cartesius di R^3

11.2-4 Vektor, Hasilkali Titik, Hasilkali Silang

11.5 Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva

11.6 Garis dan Garis Singgung di Ruang

11.8 Permukaan di Ruang

MA1201 MATEMATIKA 2A

11.1 SISTEM KOORDINAT CARTESIUS DI R^3

- Memahami **sistem koordinat Cartesius** di $\mathbf{R}^3$
- Mengenali dan menggambar grafik per-samaan di $\mathbf{R}^3$

Apa yang Akan Dipelajari

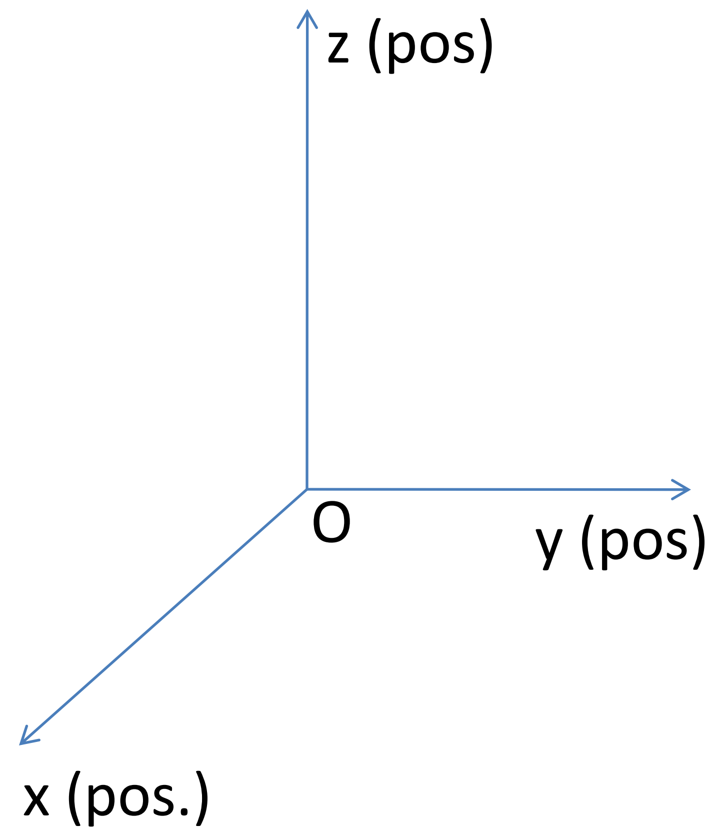
Kelak kita akan membahas vektor di bidang ($\mathbf{R}^2$) dan di ruang ($\mathbf{R}^3$), dan setelah itu kita akan membahas pula fungsi bernilai vektor.

Sistem koordinat Cartesius (dan polar) di $\mathbf{R}^2$ telah kita pelajari sebelumnya.

Sekarang kita akan mempelajari sistem koordinat Cartesius di $\mathbf{R}^3$.

Sistem Koordinat Cartesius di $\mathbf{R}^3$

Sistem Koordinat Cartesius di $\mathbf{R}^3$ terdiri dari 3 sumbu yang saling tegak lurus dan berpotongan di titik O, yang kemudian disebut sebagai **titik asal**. Ketiga sumbu tsb biasanya disebut sebagai sumbu-x, sumbu-y, dan sumbu-z, dan membagi ruang menjadi 8 **oktan**.

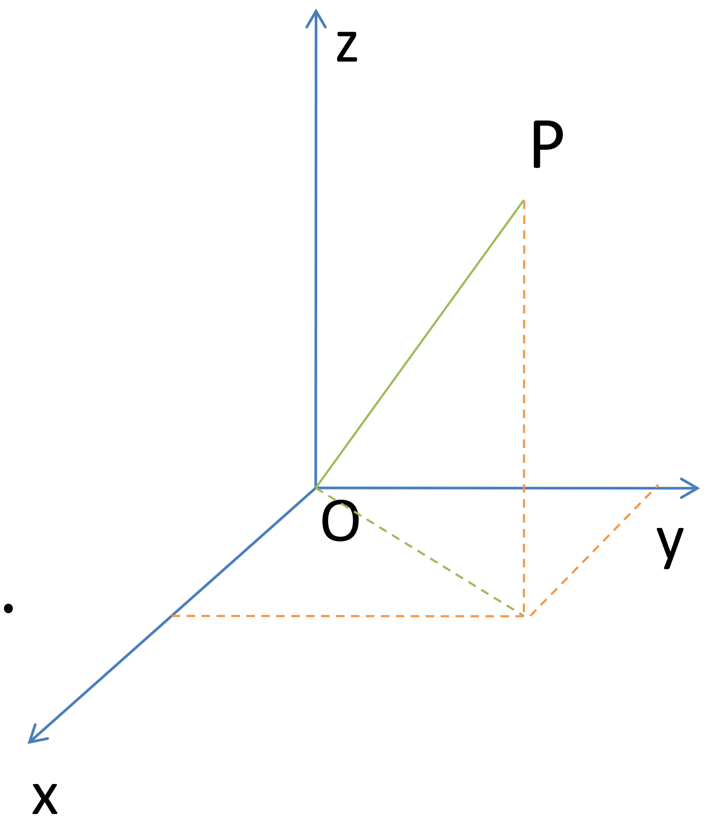


Sistem Koordinat Cartesius di $\mathbf{R}^3$

Setiap titik P di $\mathbf{R}^3$ dinyata-kan sebagai koordinat P(x,y,z), seperti pd gambar.

Jarak antara 2 titik $P(x_1,y_1,z_1)$ dan $Q(x_2,y_2,z_2)$ diberikan oleh rumus $|PQ|$ =

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$



Persamaan Bola, Bidang, dan Garis

1. Persamaan bola yang berpusat di P(*a*,*b*,*c*) dan berjari-jari *R* adalah

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

2. Persamaan umum bidang di $\mathbf{R}^3$ adalah

$$Ax+By+Cz=D, A^2+B^2+C^2\neq 0.$$

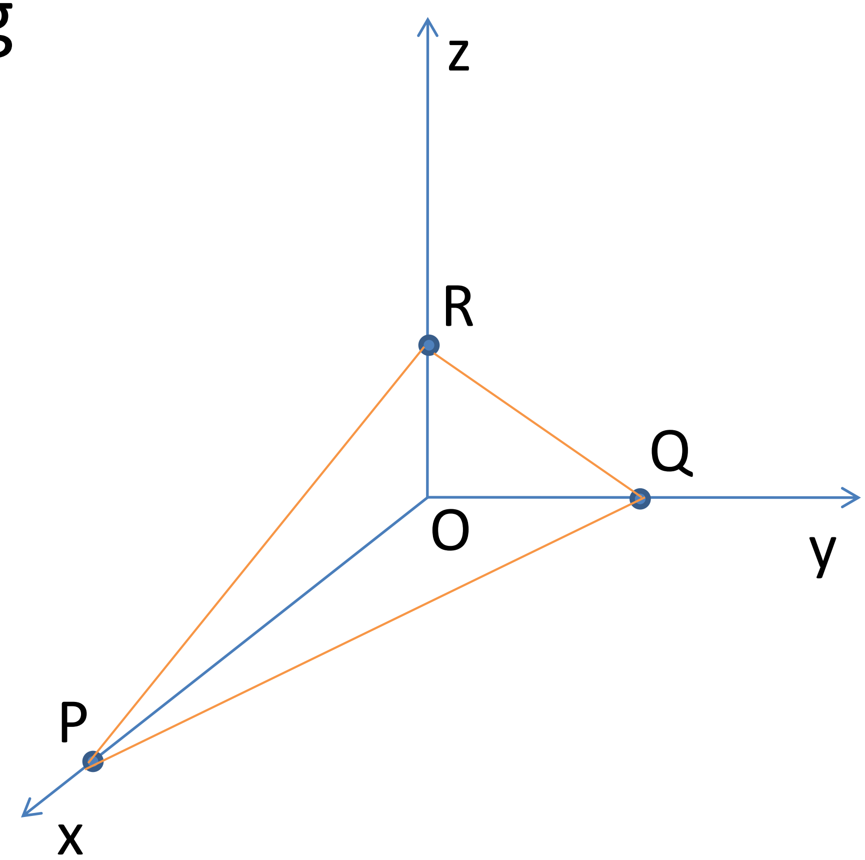
3. Persamaan $$\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{r}$$ menyatakan garis lurus yang melalui T(*a*,*b*,*c*) dan searah dengan vektor (*p*,*q*,*r*).

Contoh: Menggambar Bidang di $\mathbf{R}^3$

Gambarlah bidang yang memiliki persamaan

$$x + 2y + 3z = 6.$$

<u>Jawab</u>: Bidang melalui titik P(6,0,0), Q(0,3,0), dan R(0,0,2).



Soal

Gambarlah bidang di $\mathbf{R}^3$ yg memiliki persamaan

$$2x + 3z = 12.$$

MA1201 MATEMATIKA 2A

11.2-4 VEKTOR, HASILKALI TITIK, DAN HASILKALI SILANG

- Memahami sifat-sifat **vektor** di $\mathbf{R}^2$ dan $\mathbf{R}^3$
- Menghitung jumlah dua vektor, hasilkali vektor dengan skalar, dan besar vektor
- Menghitung **hasilkali titik** dan **hasilkali silang** dua vektor, dan mengetahui sifat-sifatnya

Apa dan Mengapa Vektor

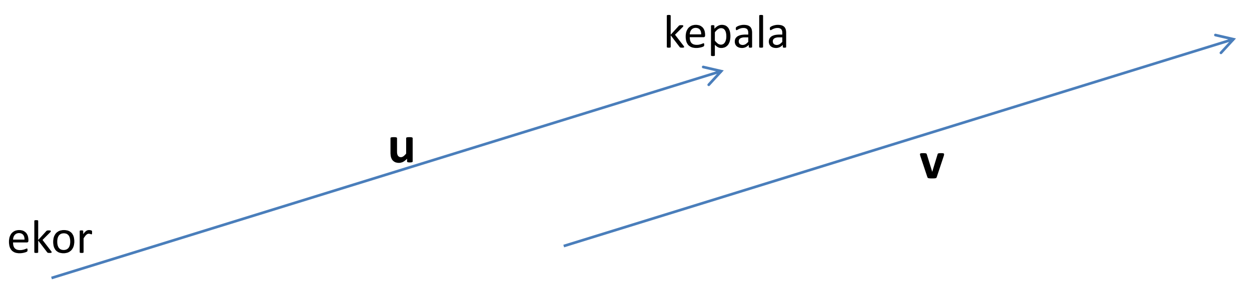
Kuantitas panjang, massa, dan waktu merupakan **skalar**, yang dapat dinyatakan dengan sebuah bilangan.

Kuantitas fisis lainnya seperti kecepatan dan gaya tidak hanya mempunyai panjang atau **besar** (*magnitude*) tetapi juga **arah**.

Besaran atau kuantitas tsb dikenal sebagai **vektor**. Pemahaman tentang vektor juga diperlukan untuk mempelajari fungsi dengan banyak peubah.

Vektor: Pendekatan Geometri

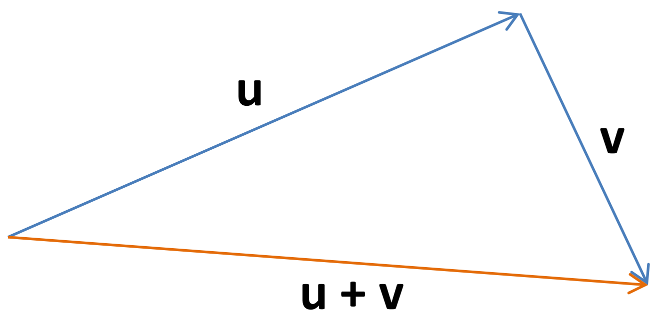
Secara geometri, vektor dinyatakan sebagai anak panah, yang mempunyai titik awal (**ekor**) dan titik akhir (**kepala**), dan dituliskan dengan huruf *tebal* misalnya **u** atau **v**.



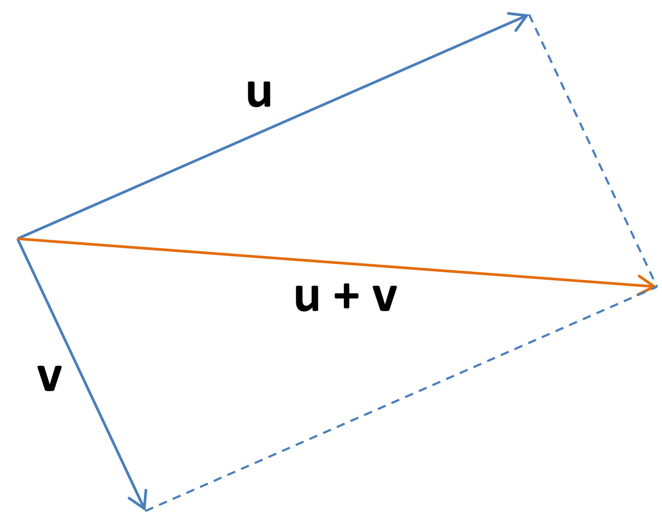
Dua vektor dikatakan sama atau **setara** apabila kedua vektor tsb mempunyai panjang dan arah yang sama. Sbg contoh, **u** dan **v** di atas setara.

Penjumlahan Dua Vektor

Diberikan dua vektor, kita dapat menghitung **jumlah**nya dengan dua cara:



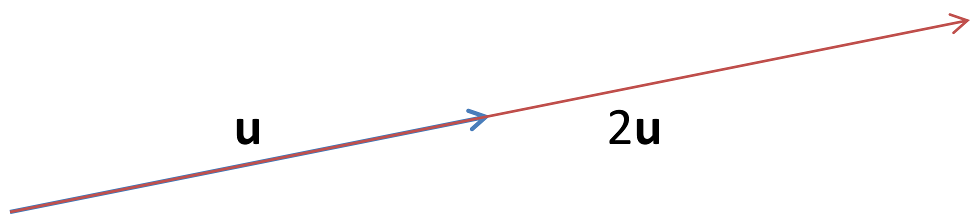
Cara Segitiga



Cara Jajargenjang

Perkalian dengan Skalar

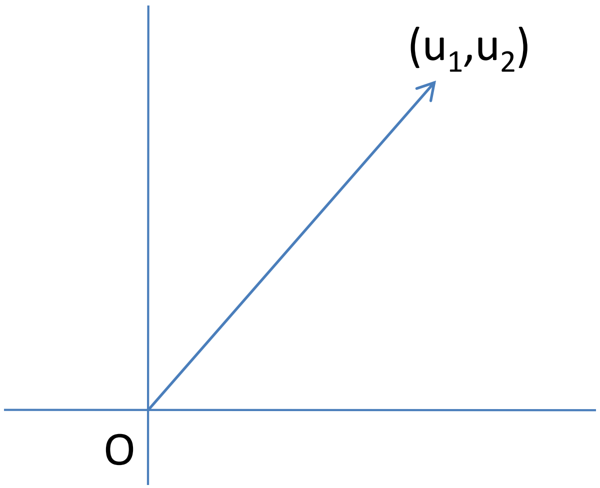
Kita juga dapat **mengalikan** vektor **dgn skalar**:



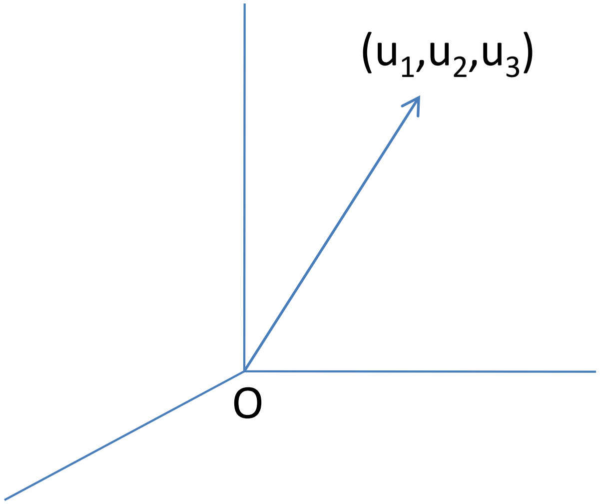
Selisih dua vektor, **u** – **v**, dimaknai sebagai hasil operasi **u** + (-1)**v**.

Vektor: Pendekatan Aljabar

Di $\mathbf{R}^2$: vektor **u** dinyatakan sebagai **pasangan terurut** (u_1,u_2). [Dalam hal ini, ekor vektor **u** adalah O(0,0) dan kepalanya adalah (u_1,u_2).]



Di $\mathbf{R}^3$: vektor **u** dinyatakan sebagai **tripel** (u_1,u_2,u_3).



Perkalian dengan Skalar dan Penjumlahan

Di $\mathbf{R}^2$: Jika $\mathbf{u} = (u_1,u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1,v_2)$, dan $c \in R$, maka

$$c\,\mathbf{u} := (cu_1,cu_2)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1+v_1,u_2+v_2)$$

Di $\mathbf{R}^3$: Jika $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$, dan $c \in R$, maka

$$c\,\mathbf{u} := (cu_1,cu_2,cu_3)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := (u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)$$

Vektor Basis

Di $\mathbf{R}^2$: vektor $\mathbf{i} = (1,0)$ dan $\mathbf{j} = (0,1)$ disebut sebagai vektor basis (baku). Vektor **u** dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{u} = (u_1,u_2) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}.$$

Di $\mathbf{R}^3$: vektor $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, dan $\mathbf{k} = (0,0,1)$ merupakan vektor basis (baku).

$$\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}.$$

Besar atau Panjang Vektor

Di $\mathbf{R}^2$: $\|\overline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Di $\mathbf{R}^3$: $\|\overline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Catatan. Vektor yang panjangnya sama dengan 1 disebut **vektor satuan**.

Teorema (Sifat Aljabar Vektor)

1. u + v = v + u

2. (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)

3. u + 0 = 0 + u = u

4. u + (-u) = 0

5. a(b**u**) = (ab)**u**

6. a(**u** + **v**) = a**u** + a**v**

7. (a + b)**u** = a**u** + b**u**

8. 1**u = u**

9. $\left\|a\overline{u}\right\| = \left|a\right| \cdot \left\|\overline{u}\right\|$.

Hasilkali Titik

Di **R**^{2}: $\bar{u} \bullet \bar{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2$.

Di **R**^{3}: $\bar{u} \bullet \bar{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Catatan: $\bar{u} \bullet \bar{u} = \|\bar{u}\|^2$.

Sifat Hasilkali Titik

1. $\bar{u} \bullet \bar{v} = \bar{v} \bullet \bar{u}$

2. $\bar{u} \bullet (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \bullet \bar{v} + \bar{u} \bullet \bar{w}$

3. $c(\bar{u} \bullet \bar{v}) = (c\bar{u}) \bullet \bar{v}$

4. $\bar{0} \bullet \bar{v} = 0$

Teorema

*Jika θ adalah sudut tak negatif antara dua vector tak nol **u** dan **v**, maka*

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cos\theta.$$

Definisi: Dua vektor **u** dan **v** **tegak lurus** jika dan hanya jika $\bar{u} \bullet \bar{v} = 0.$

Hasilkali Silang di $\mathbf{R}^3$

Definisi: **Hasil kali silang** antara **u** dan **v** adalah

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} := (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Dapat diperiksa bahwa $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$.

Sifat Hasilkali Silang

1. $\bar{u} \bullet (\bar{u} \times \bar{v}) = 0 = \bar{v} \bullet (\bar{u} \times \bar{v}).$

   yakni **u** x **v** tegak lurus pada **u** dan **v**.

2. **u**, **v**, dan **u** x **v** membentuk tripel tangan kanan.

3. $\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \sin\theta.$

Sifat Hasilkali Silang

1. $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}.$

2. $k(\bar{u} \times \bar{v}) = (k\bar{u}) \times \bar{v} = \bar{u} \times (k\bar{v}).$

3. $(\bar{u} \times \bar{v}) \bullet \bar{w} = \bar{u} \bullet (\bar{v} \times \bar{w}).$

Soal

Buktikan bahwa: $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$.