MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2016/2017

1 Maret 2017

Bab Sebelumnya

9.1 Barisan Tak Terhingga

9.2 Deret Tak Terhingga

9.3 Deret Positif: Uji Integral

9.4 Deret Positif: Uji Lainnya

9.5 Deret Ganti Tanda

9.7 Deret Pangkat

9.8 Operasi pada Deret Pangkat

9.8 Deret Taylor dan Deret Maclaurin

9.9 Hampiran Taylor terhadap Fungsi

Bab 10 & 11: Topik Pilihan

10.1-2 Parabola, Elips, dan Hiperbola

10.4 Persamaan Parametrik Kurva di Bidang

10.5 Sistem Koordinat Polar

11.1 Sistem Koordinat Cartesius di $\mathbf{R}^3$

11.2-4 Vektor, Hasilkali Titik, Hasilkali Silang

11.5 Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva

11.6 Garis dan Garis Singgung di Ruang

11.8 Permukaan di Ruang

Sasaran Kuliah Hari Ini

10.1-2 Parabola, Elips, dan Hiperbola

Mengenali dan dapat menentukan persamaan **parabola**, **elips**, dan **hiperbola**

10.4 Persamaan Parametrik Kurva di Bidang

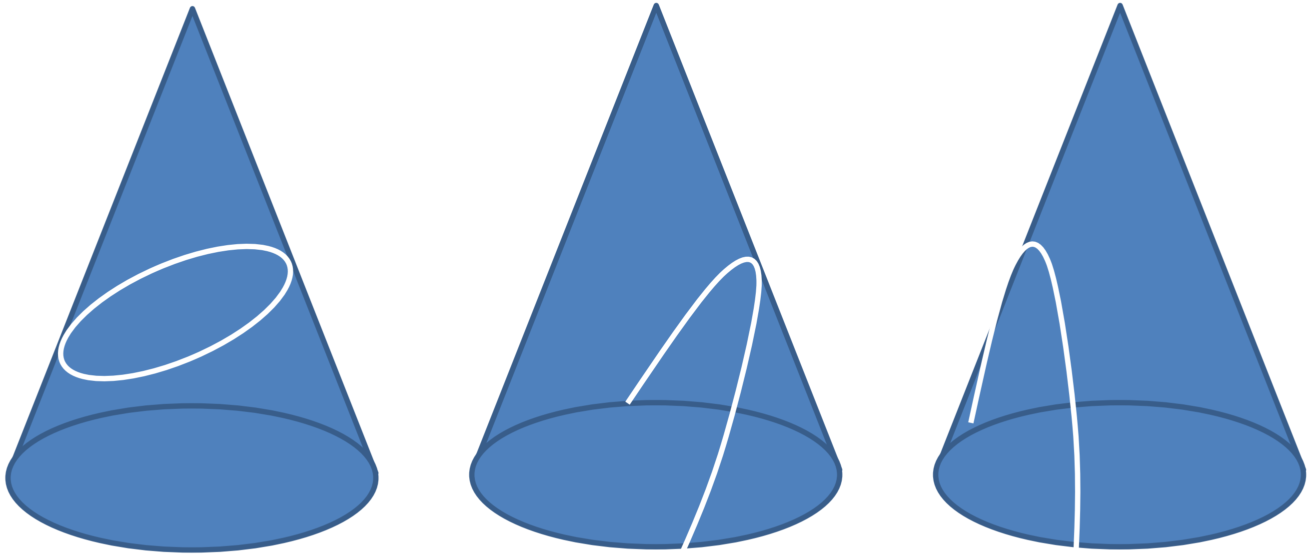
MA1201 MATEMATIKA 2A

10.1-2 PARABOLA, ELIPS, DAN HIPERBOLA

Mengenali dan dapat menentukan per-samaan **parabola**, **elips**, dan **hiperbola**

Tiga Kurva Irisan Kerucut

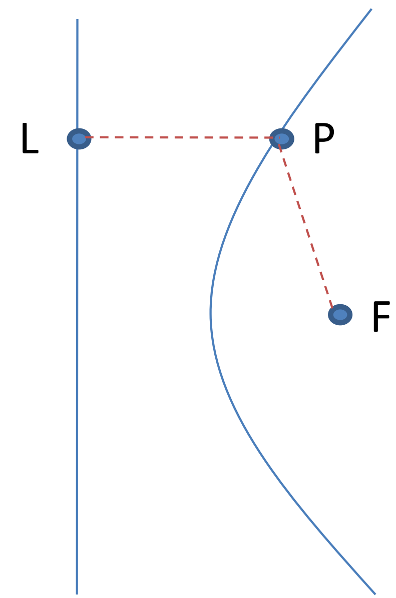
Bila permukaan kerucut diiris oleh bidang, maka akan diperoleh kurva berbentuk **parabola**, **elips**, atau **hiperbola**.



Tiga Kurva Irisan Kerucut

Ketiga kurva irisan kerucut mempunyai persamaan yang serupa, yakni

$$|PF| = \varepsilon |PL| \quad ..... \quad (*)$$



dengan F menyatakan **titik fokus** pada bidang, P titik sembarang pada kurva, dan L adalah proyeksi titik P pada **garis direktriks** l pada bidang; sementara ε menyatakan konstanta **eksentrisitas**.

Tiga Kurva Irisan Kerucut

Jika $\varepsilon = 1$, maka (*) merupakan persamaan **parabola**.

Jika $0 < \varepsilon < 1$, maka (*) merupakan persamaan **elips**.

Jika $\varepsilon > 1$, maka (*) merupakan persamaan **hiperbola**.

Persamaan Parabola

Jika garis direkstriks-nya adalah $y = -p$ dan titik fokusnya adalah $F(0,p)$, maka persamaan

$$|PF| = |PL|$$

setara dengan

$$4py = x^2,$$

yang merupakan persamaan sebuah parabola.

Persamaan Elips & Hiperbola

Jika garis direkstriks-nya adalah $x = k$, titik fokusnya adalah $F(c,0)$, dan $P(\pm a,0)$ adalah titik puncak kurva, maka persamaan

$$|PF| = \varepsilon |PL|$$

setara dengan

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1,$$

yang merupakan persamaan elips (bila $\varepsilon < 1$) atau hiperbola (bila $\varepsilon > 1$).

Bahan Diskusi

1. Sifat optik parabola: setiap sinar yang masuk ke dalam parabola terpantul ke titik fokusnya (hal. 511)
2. Sifat panjang tali konstan pada
   a. Elips: $|PF_1| + |PF_2| = 2a$.
   b. Hiperbola: $||PF_1| – |PF_2|| = 2a$.

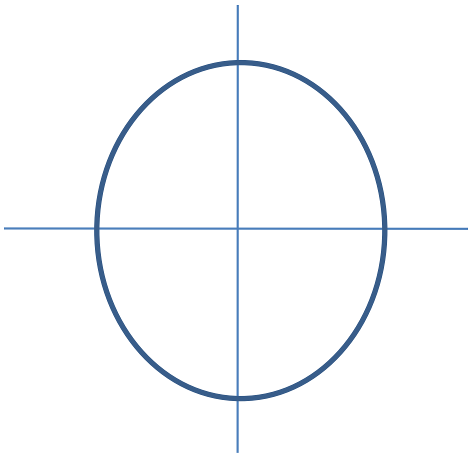
   (hal. 518)

MA1201 MATEMATIKA 2A

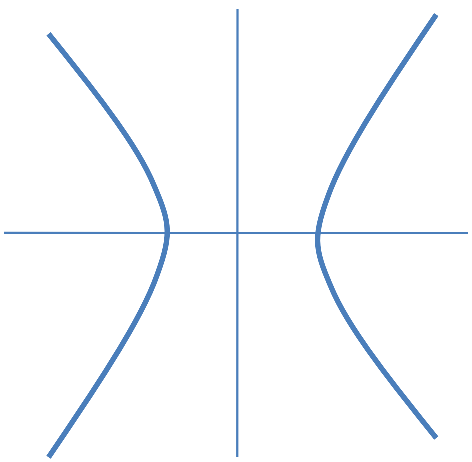
10.4 PERSAMAAN PARAMETRIK KURVA DI BIDANG

- Mengenali kurva di bidang yang dinyatakan dalam **persamaan parametrik**
- Menyatakan kurva di bidang dalam persamaan parametrik
- Menghitung turunan dan integral dengan menggunakan persamaan parametrik

Mengapa Persamaan Parametrik



Elips dan hiperbola merupakan kurva di bidang yang bukan merupakan grafik dari suatu fungsi. Jadi, elips dan hiperbola <u>tidak dapat</u> dinyatakan dalam bentuk persamaan $y = f(x)$.



Namun, dengan menggunakan **parameter** t, elips dan hiperbola dapat dinyatakan dalam **persamaan parametrik**

$$x = f(t), \quad y = g(t), \text{ dengan } t \in I,$$

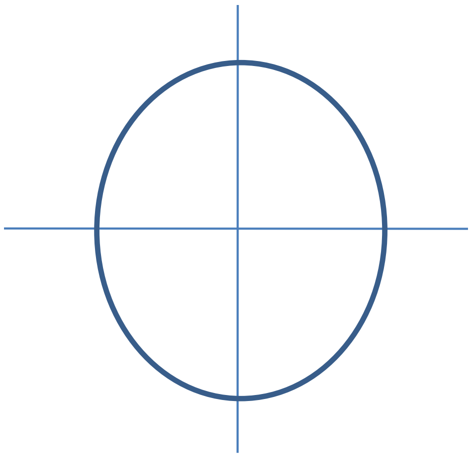
untuk suatu interval I.

Persamaan Elips dan Hiperbola

Elips dan hiperbola dengan persamaan Cartesius

(E): $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

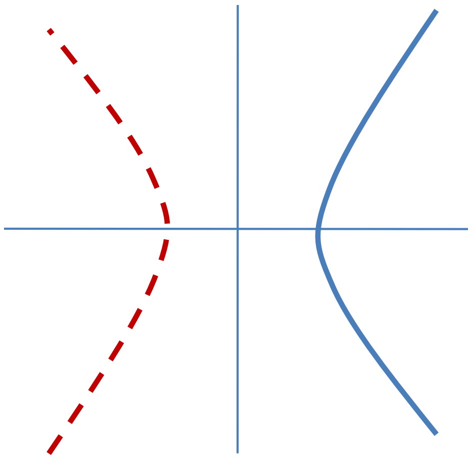
(H): $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



dapat dinyatakan dalam persamaan parametrik

(E): $x = a \cos t,\ y = b \sin t,\ t \in [0,2\pi]$.

(H): $x = a \cosh t,\ y = b \sinh t,\ t \in \mathbf{R}$.



Beberapa Istilah

1. Pasangan persamaan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$, dengan $t \in I$, disebut **parametrisasi** kurva.
2. Jika $I = [a,b]$, maka titik $P(x(a),y(a))$ disebut **titik awal** kurva, sementara titik $Q(x(b),y(b))$ disebut **titik akhir** kurva.
3. Jika titik awal sama dengan titik akhir, maka kurva dikatakan **tertutup**.
4. Jika setiap titik pada kurva hanya dilalui satu kali, maka kurva tsb disebut kurva **sederhana**.

Contoh

Persamaan parabola $y = x^2$ dapat dinyatakan dalam persamaan parametrik

$x = t,\ \ y = t^2$, dengan $t \in \mathbf{R}$.

Sebaliknya, persamaan parametrik

$x = t + 1,\ \ y = t^2 + 1$

dapat dinyatakan dalam persamaan Cartesius dengan cara mengeliminasi t:

$$t = x - 1 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2,$$

yang merupakan persamaan sebuah parabola.

Latihan

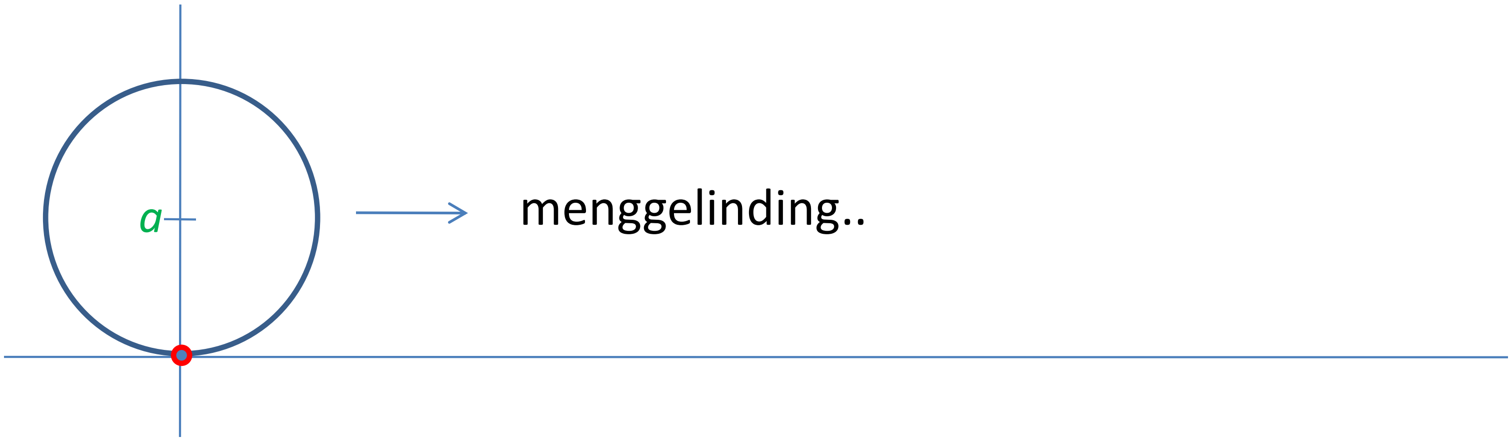
Buktikan bahwa kedua persamaan parametrik berikut merupakan persamaan setengah lingkaran bagian kanan:

1. $x = \sqrt{1-t^2}, y = t, \qquad -1 \le t \le 1.$

2. $x = \cos t, y = \sin t, \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}.$

Gambarlah kurva setengah lingkaran tsb, dgn menandai titik awal dan titik akhirnya.

Sikloid



Titik merah akan menelusuri kurva **sikloid**.

Persamaan parametrik sikloid tsb adalah

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\quad t > 0,$$

dengan t menyatakan sudut putarnya.

Turunan Fungsi Parametrik

Misalkan f dan g mempunyai turunan yang kontinu dan $f'(t) \neq 0$. Maka persamaan parametrik

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

menyatakan y sebagai sebuah fungsi dari x yang dapat diturunkan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

Contoh

Diketahui $x = 4 \cos t$, $y = 5 \sin t$, dgn $0 < t < 3$. Tentukan dy/dx pada saat $t = \pi/4$.

Jawab:

Integral dalam Parameter

Contoh:

Hitung $\int_1^2 xy^2\,dx$, jika $x = 2t + 1$, $y = t^2 + 1$.

Latihan

Tentukan luas daerah di bawah satu bagian kurva sikloid.