

MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2016/2017

3 Februari 2017

Bab Sebelumnya

8. Bentuk Tak Tentu dan Integral Tak Wajar

8.1 Bentuk Tak Tentu $0/0$

8.2 Bentuk Tak Tentu Lainnya

8.3 Integral Tak Wajar dgn Batas Tak Terhingga

8.4 Integral Tak Wajar dgn Integran Tak Terbatas

MA1201 MATEMATIKA 2A

BAB 9. DERET TAK TERHINGGA

Sasaran Kuliah Hari Ini

9.1 Barisan Tak Terhingga

Memeriksa **kekonvergenan** suatu **barisan** dan, bila mungkin, menghitung **limitnya**

MA1201 MATEMATIKA 2A

9.1 BARISAN TAK TERHINGGA

Memeriksa **kekonvergenan** suatu **barisan** dan, bila mungkin, menghitung **limitnya**

Mengapa Barisan Tak Terhingga

Masih ingatkah **Metode Bagi Dua** untuk mendapatkan hampiran akar dari suatu persamaan $f(x) = 0$ pada suatu selang?

Pada setiap langkah, kita membagi dua selang dan menaksir akar persamaan itu dengan titik tengah selang tersebut.

Dengan metode ini, kita dapatkan barisan titik-titik tengah selang $x_1, x_2, x_3, \dots$ yang merupakan hampiran akar persamaan.

Apa itu Barisan Tak Terhingga

Barisan tak terhingga, atau singkatnya **barisan** (dari bilangan real) adalah suatu fungsi dengan daerah asal $\mathbf{N}$ dan daerah nilai $\mathbf{R}$, yang biasanya disajikan sebagai $\{a_n\}$ atau

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

dengan $a_n \in \mathbf{R}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Contoh 1: Barisan $\{2n - 1\}$ adalah barisan bilangan ganjil 1, 3, 5, 7,

Contoh Lagi

2. Barisan $\{(-1)^n\}$ adalah barisan bilangan -1, 1, -1, 1, ...

Catatan: Barisan $\{(-1)^n\}$ tidak sama dengan himpunan $\{(-1)^n : n \in \mathbf{N}\} = \{-1, 1\}$.

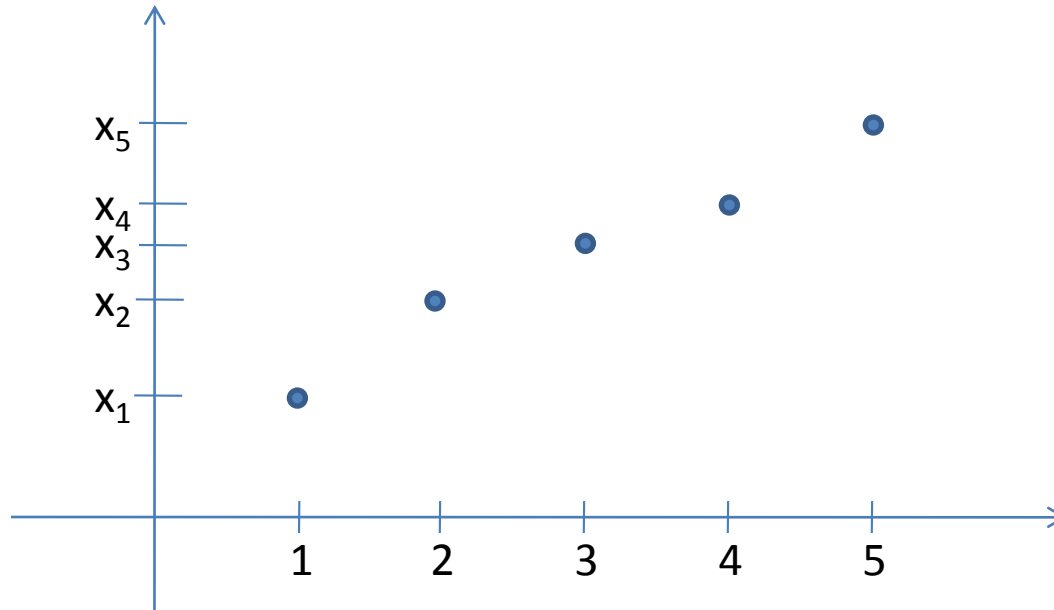
3. Barisan $\{a_n\}$ yang didefinisikan dengan **rumus rekursif:** $a_1 = 1$ dan

$$a_{n+1} = 0.5(a_n + 2), \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \dots$$

adalah barisan bilangan 1, 1.5, 1.75, ...

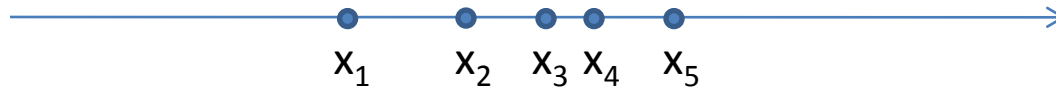
“Grafik” Barisan (1)

Barisan dapat kita plot pada bidang koordinat

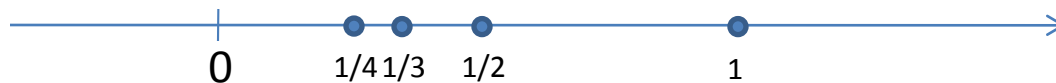


“Grafik” Barisan (2)

Barisan dapat kita plot pada garis bilangan real



Contoh: $\{1/n\}$



Kekonvergenan Barisan

Diberikan suatu barisan $\{a_n\}$, apa yang terjadi bila $n \rightarrow \infty$?

Definisi: Barisan $\{a_n\}$ dikatakan **konvergen** ke suatu bilangan L , ditulis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

apabila untuk tiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbf{N}$ sehingga

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Catatan. Tidak semua barisan konvergen.
Barisan yang tidak konvergen disebut **divergen**.

Contoh:

1. Barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ konvergen ke 0, yakni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Untuk tiap $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $N > 1/\varepsilon$
sehingga jika $n \geq N$, maka

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

2. Barisan $\{(-1)^n\}$ merupakan barisan yang divergen, yakni: untuk tiap $L \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \neq L.$$

Sebagai contoh, untuk $L = 1$, ada $\varepsilon = 1$ sehingga berapapun $N \in \mathbf{N}$ yang kita pilih, selalu ada bilangan ganjil $n \geq N$ sehingga

$$\left| (-1)^n - 1 \right| = 2 > \varepsilon.$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \neq 1.$$

9.1b Beberapa Teorema Bantuan untuk Memeriksa Kekonvergenan Barisan dan Menghitung Limitnya

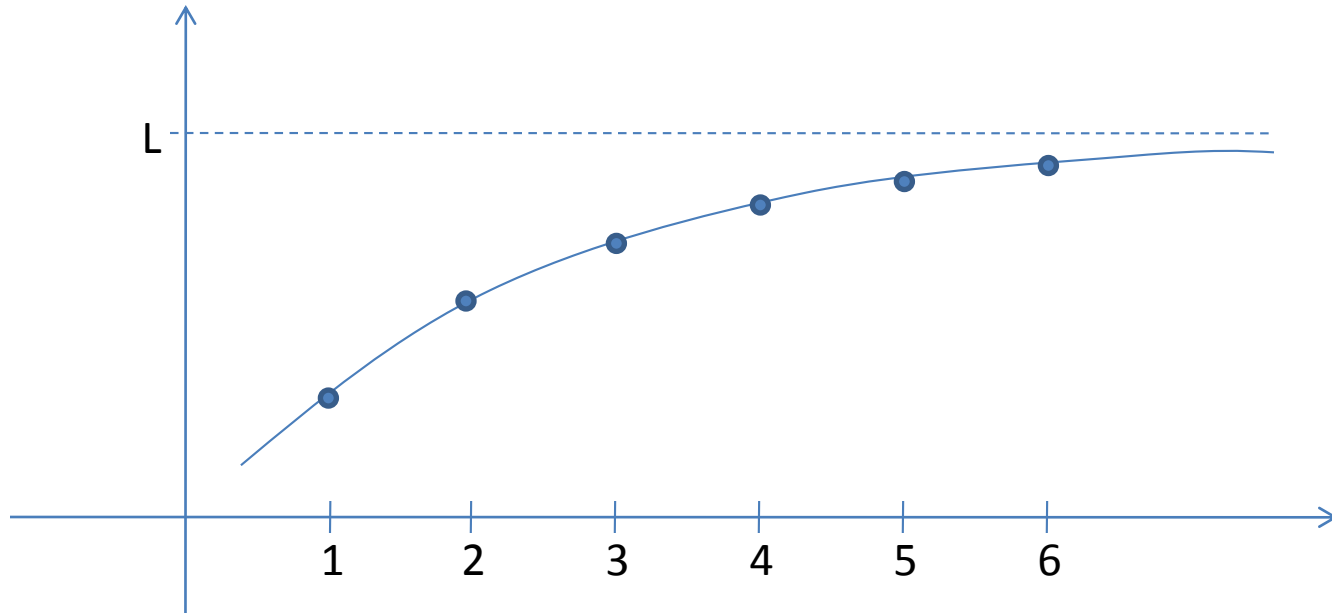
Teorema Limit Barisan

Misalkan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ barisan yang konvergen, dan k konstanta. Maka

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ asalkan } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.$

Teorema Limit Barisan

Jika $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, *maka* $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$.



Contoh:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2+3/n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2+3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n} = \frac{1}{2+3 \cdot 0} = \frac{1}{2}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+2}{n^3+3n-1} = \dots$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = \dots$$

Teorema Apit untuk Barisan

Jika $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk $n \geq K$ ($K \in \mathbf{N}$ tertentu) dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L, \text{ maka } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Contoh:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, karena $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

dan $\pm \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Jika $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,

karena $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

Barisan Monoton

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan **naik** apabila $a_n \leq a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Barisan $\{a_n\}$ dikatakan **turun** apabila $a_n \geq a_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Barisan naik atau turun disebut barisan **monoton**.

Contoh: $\{1/n\}$ turun, sedangkan $\{2^n\}$ naik.

Latihan

Selidiki apakah barisan berikut monoton (naik atau turun) atau tidak.

1. $\{1 - 2^{-n}\}$
2. $\{(-1)^n\}$
3. $\{\ln n\}$
4. $\{n \cdot \ln n\}$
5. $\{(\ln n)/n\}$

Teorema Barisan Monoton

*Jika barisan $\{a_n\}$ naik dan **terbatas di atas**, yakni terdapat $M \in \mathbf{R}$ sehingga $a_n \leq M$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$, maka $\{a_n\}$ konvergen.*

*Jika barisan $\{a_n\}$ turun dan **terbatas di bawah**, yakni terdapat $m \in \mathbf{R}$ sehingga apabila $m \leq a_n$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$, maka $\{a_n\}$ konvergen.*

Contoh/Latihan

Barisan $\{a_n\}$ yang didefinisikan dengan **rumus rekursif**: $a_1 = 1$ dan

$$a_{n+1} = 0.5(a_n + 2), \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \dots$$

adalah barisan bilangan 1, 1.5, 1.75,

Dengan **Prinsip Induksi Matematika***, dapat dibuktikan bahwa barisan ini naik dan terbatas di atas. Karena itu, menurut Teorema Barisan Monoton, barisan $\{a_n\}$ konvergen.

Ke manakah barisan $\{a_n\}$ konvergen?

*Prinsip Induksi Matematika

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan atau kalimat matematika yang berkenaan dengan $n \in \mathbf{N}$.

[Sebagai contoh, $P(n)$ adalah kalimat “ $n < 2^n$ ”.]

Jika:

(i) $P(1)$ benar, dan

(ii) $P(k)$ benar mengakibatkan $P(k+1)$ benar,

maka:

$P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.