MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2016/2017

22 Maret 2017

Kuliah yang Lalu

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

Kuliah Hari Ini

12.1 Fungsi dua (atau lebih) peubah

12.2 Turunan Parsial

12.3 Limit dan Kekontinuan

12.4 Turunan fungsi dua peubah

12.5 Turunan berarah dan gradien

12.6 Aturan Rantai

12.7 Bidang singgung dan aproksimasi

12.8 Maksimum dan minimum

12.9 Metode pengali Lagrange

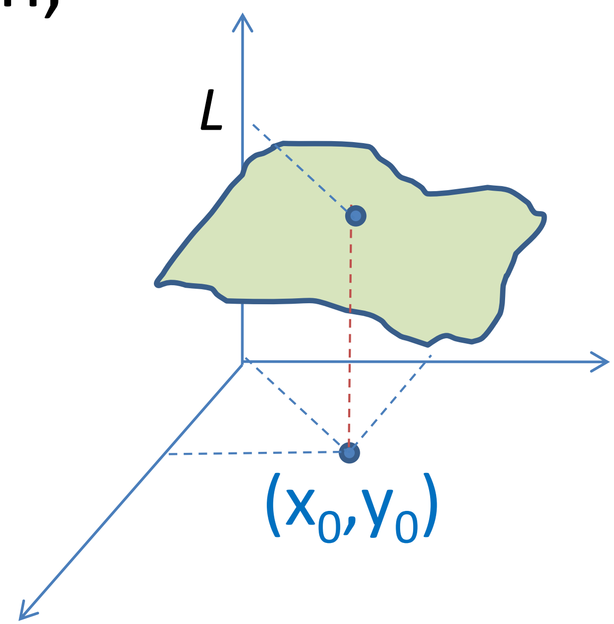
12.3 LIMIT DAN KEKONTINUAN

- Memeriksa apakah suatu fungsi dua peubah mempunyai **limit** di titik tertentu dan menentukan limitnya (bila ada)
- Memeriksa **kekontinuan** fungsi dua peubah di titik tertentu

Limit Fungsi Dua Peubah

Diberikan suatu fungsi dua peubah, sebutlah $z = f(x,y)$.

Bila (x,y) mendekati (x_0,y_0), apa yang terjadi dengan $f(x,y)$?

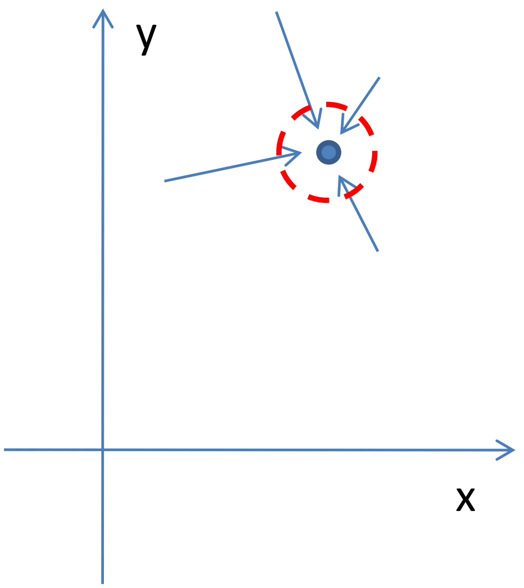


Def. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-L| < \varepsilon.$$

Beberapa Catatan

- Limit f di (x_0,y_0) sama dengan L apabila untuk setiap (x,y) yang berada **dalam radius δ** dari (x_0,y_0), kecuali mungkin (x_0,y_0) sendiri, nilai $f(x,y)$ berada dalam radius ε dari L.
- Dalam hal ini, nilai $f(x,y)$ harus menuju L, bagaimanapun caranya (x,y) mendekati (x_0,y_0).
- Jika melalui lintasan berbeda f menuju nilai yang berbeda, maka f *tidak* mempunyai limit di (x_0,y_0).



Teorema Substitusi

Jika $f(x,y)$ merupakan polinom dalam x dan y, yakni

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}c_{ij}x^i y^j,$$

maka

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Jika $f(x,y) = p(x,y)/q(x,y)$ dengan p dan q polinom dalam x dan y, maka

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \frac{p(a,b)}{q(a,b)},$$

asalkan $q(a,b) \neq 0$.

Teorema Apit

- Jika …
- Maka …

Contoh

1. $\lim_{(x,y)\to(3,4)} (x^2 + y^2) = 3^2 + 4^2 = 25.$

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1+xy}{x^2+y^2}$ tidak ada, karena pembilangnya menuju 1 sementara penyebutnya menuju 0.

Contoh

3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ tidak ada, karena alasan sebagai berikut:

Sepanjang garis $y = mx$, kita amati bahwa

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

yang bergantung pada nilai m. Jadi tidak ada nilai tertentu yang dituju ketika (x,y) mendekati $(0,0)$.

Soal

Selidiki apakah limit berikut ada/tidak ada.

1. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$

2. $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$

Kekontinuan

Fungsi $f(x,y)$ dikatakan **kontinu** di (a,b) apabila

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Sebagai contoh, polinom kontinu di setiap titik.

Teorema: Jika $g(x,y)$ kontinu di (a,b) dan $f(t)$ kontinu di $g(a,b)$, maka $f \circ g$ kontinu di (a,b).

Sebagai contoh, $f(x,y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ kontinu di setiap titik (x,y).

Kesamaan Turunan Parsial Campuran

Jika f_{xy} dan f_{yx} kontinu pada suatu cakram di sekitar (a,b), maka $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.

Contoh fungsi yang turunan parsial campuran-nya tidak sama diberikan di buku Purcell (Soal 12.3 no. 42). Lihat *slide* berikut… →

Soal

Diketahui

$$f(x,y) := xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

$$:= 0, \qquad (x,y) = (0,0).$$

Hitung $f_{xy}(0,0)$ dan $f_{yx}(0,0)$.

Apakah hasilnya sama?