8 Lintasan, Kurva Mulus, dan Titik Singular

Pada bab sebelumnya kita sudah membahas bagaimana kita dapat menentukan banyak sisi dan banyak titik sudut suatu bangun datar dengan mengamati lintasan tepi bangun tersebut. Sekarang, kita akan mendalami apa yang dimaksud dengan lintasan tutup sederhana dan kurva mulus pada bidang, serta titik singular.

Pertama, yang dimaksud dengan *lintasan tutup sederhana* pada bidang adalah *grafik* suatu *fungsi* bernilai *vektor* (pada bidang) yang *kontinu* pada suatu selang [a, b], sebutlah

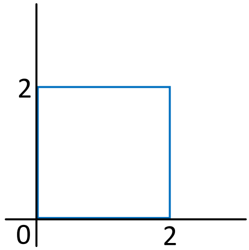
$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b,$$

dengan $\gamma(a) = \gamma(b)$ (yakni, titik awal sama dengan titik akhir), dan tidak ada titik yang dilalui lebih daripada satu kali kecuali titik (x(a), y(a)).

Secara intuitif, fungsi f(t) dikatakan kontinu *pada selang* [a, b] *apabila untuk t_1 dan t_2* ∈ [a, b] *yang berdekatan, nilai $f(t_1)$ dan $f(t_2)$ juga berdekatan. Ini berarti bahwa grafik sebuah fungsi yang kontinu tidak akan terputus.*

Sebagai contoh, batas daerah persegi [0, 2] × [0, 2] pada *bidang-xy* merupakan lintasan tertutup sederhana dengan persamaan

$$
\begin{aligned}
\gamma(t) &= (t, 0), && 0 \le t \le 2,\\
&= (2, t-2), && 2 < t \le 4,\\
&= (6-t, 2), && 4 < t \le 6,\\
&= (0, 8-t), && 6 < t \le 8.
\end{aligned}
$$

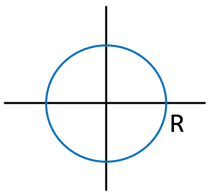


Di sini $\gamma(t)$ merupakan fungsi yang kontinu pada selang [0, 8], dengan $\gamma(0) = (0, 0) = \gamma(8)$, dan tidak ada titik yang dilalui lebih daripada satu kali kecuali titik (0, 0).

Contoh lainnya, lintasan tertutup sederhana dengan persamaan

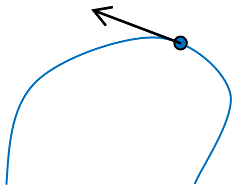
$$\lambda(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

mengelilingi daerah lingkaran yang berpusat di (0, 0) dan berjari-jari R. (Di sini t menyatakan besar sudut dalam *radian*; 2π radian = 360^{o}.)

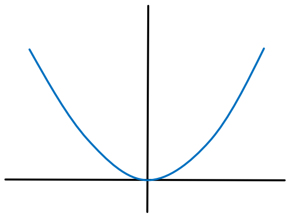


Perhatikan bahwa $\lambda(t)$ merupakan fungsi yang kontinu (bahkan *mulus*) pada selang $[0, 2\pi]$, dengan $\lambda(0) = (R, 0) = \lambda(2\pi)$, dan tidak ada titik yang dilalui lebih daripada satu kali kecuali titik (R, 0).

Selanjutnya, yang dimaksud dengan *kurva mulus* pada bidang adalah grafik suatu fungsi bernilai vektor (pada bidang) yang mempunyai *turunan* di setiap titik dalam selang di mana ia terdefinisi, mempunyai *turunan kanan* di titik awal, dan mempunyai *turunan kiri* di titik akhir. Secara geometris, turunan dari fungsi vektor di suatu titik merupakan *vektor singgung* di titik tersebut (lihat gambar). Jadi, kurva yang mulus akan mempunyai *garis singgung* di setiap titik, kecuali mungkin di titik awal yang berimpit dengan titik akhir.



Sebagai contoh, grafik fungsi $\gamma(t) = (t, t^2)$, $-1 \leq t \leq 1$, merupakan sebuah kurva mulus (yang berbentuk *parabola* $y = x^2$) pada bidang-xy.



Contoh lainnya tentu saja adalah lintasan lingkaran

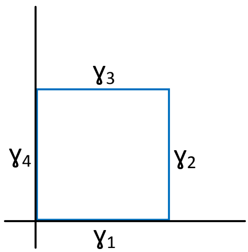
$$\lambda(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Bahkan, kurva lingkaran mempunyai garis singgung di setiap titik, termasuk di titik (R, 0), yang merupakan titik awal yang berimpit dengan titik akhir. [Di titik (R, 0), turunan kanan λ (ketika $t \to 0+$) dan turunan kiri λ (ketika $t \to 2\pi-$) sama dengan vektor (0, R).]

Sekarang perhatikan lagi lintasan $\gamma(t)$ yang mengelilingi daerah persegi $[0, 2] \times [0, 2]$. Lintasan ini 'patah' alias tidak mempunyai turunan di empat titik, yaitu di (2, 0), (2, 2), (0, 2), dan (0, 0). Sebagai penjelasan, γ tidak mempunyai turunan di titik (2, 0) karena turunan kirinya (ketika $t \to 2-$) adalah vektor (1, 0) sedangkan turunan kanannya (ketika $t \to 2+$) adalah vektor (0, 1). Hal serupa terjadi pula di titik (2, 2) dan (0, 2). Sementara itu, γ tidak mempunyai titik (0, 0) karena turunan kiri γ (ketika $t \to 4-$) tidak sama dengan turunan kanan γ (ketika $t \to 0+$).

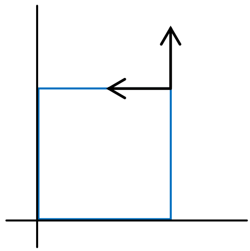
Titik-titik di mana sebuah lintasan tutup tidak mempunyai turunan itulah yang kita sebut sebagai *titik singular* lintasan tersebut.

Baik secara visual maupun melalui persamaan fungsinya, kita melihat bahwa lintasan yang mengelilingi daerah persegi $[0, 2] \times [0, 2]$ merupakan gabungan dari empat kurva mulus: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ (lihat gambar).



Keempat titik singular pada lintasan γ merupakan titik-titik pertemuan kurva γ_1 dan γ_2, kurva γ_2 dan γ_3, kurva γ_3 dan γ_4, serta kurva γ_4 dan γ_1. Dalam hal ini, singularitas terjadi karena turunan kiri di titik tersebut pada kurva sebelumnya tidak sama dengan turunan kanan di titik tersebut pada kurva sesudahnya.

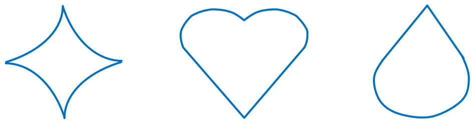
Sebagai contoh, singularitas di titik (2, 2) terjadi karena turunan kiri γ_2 di titik (2, 2) tidak sama dengan turunan kanan γ_3 di titik (2, 2). Turunan kiri γ_2 di titik (2, 2) adalah vektor (0, 1), sedangkan turunan kanan γ_3 di titik (2, 2) adalah vektor (-1, 0) (lihat gambar).



Dengan pendekatan ini, sekarang kita sepakat bahwa persegi memang mempunyai 4 sisi dan 4 titik sudut, yang sama dengan banyaknya kurva mulus dan titik singular pada lintasan yang mengelilingi daerah persegi tersebut. Dengan pendekatan ini pula, kita berargumen bahwa lingkaran mempunyai 1 sisi dan 0 titik sudut, karena lintasan tepi lingkaran merupakan sebuah kurva mulus tanpa satupun titik singular.

Banyak sisi sebuah bangun datar dapat dicek ulang sebagai berikut. Bayangkan ada sebuah titik yang dapat bergerak sepanjang lintasan tepi bangun tersebut. Pada suatu sisi, ia dapat bergerak mondar-mandir 'di dalam' sisi tersebut tanpa melalui titik singular. Bila bangun datar tersebut mempunyai lebih daripada satu sisi, maka titik tersebut tidak mungkin bisa berpindah ke sisi lainnya tanpa melalui titik singular.

Nah, sekarang kita dapat lebih mantap menentukan banyak sisi dan titik sudut pada bangun-bangun datar berikut:



Bangun paling kiri mempunyai 4 sisi dan 4 titik sudut, bangun di tengah mempunyai 2 sisi dan 2 titik sudut, dan bangun paling kanan mempunyai 1 sisi dan 1 titik sudut.

Perhatikan bahwa lintasan yang mengelilingi bangun paling kanan merupakan sebuah kurva mulus: ia mempunyai turunan di setiap titik kecuali titik awal yang berimpit dengan titik akhir. Turunan kanan di titik awal ada, tetapi tidak sama dengan turunan kiri di titik akhir. Karena itu, sekalipun lintasan tersebut merupakan sebuah kurva yang mulus, ia mempunyai sebuah titik singular (yang menjadi titik sudut bangun tersebut).

Secara umum, lintasan tutup sederhana yang merupakan gabungan dari n kurva mulus akan mempunyai n titik singular. Namun, ketika $n = 1$, terdapat kemungkinan lain, seperti yang terjadi pada lingkaran. Sebagaimana yang telah kita ulas sebelumnya, pada lintasan yang mengelilingi daerah lingkaran, turunan kanan di titik awal sama dengan turunan kiri di titik akhir, sehingga secara keseluruhan lingkaran merupakan kurva yang mulus tanpa satu pun titik singular. Fakta inilah yang membuat lingkaran istimewa!□