# 5 Archimedes Bergelut dengan Lingkaran

"*Beri saya tempat untuk bertumpu, maka saya bisa mengangkat Bumi.*" Demikian ujar Archimedes dari Syracusa (287–212 SM), salah seorang jebolan sekolah yang diasuh oleh Euclid di Alexandria. Tak sedikit skolar masa kini menilai bahwa Archimedes adalah matematikawan dan fisikawan terhebat sebelum Isaac Newton.

Banyak kisah menarik tentang Archimedes, antara lain ketika ia sedang mandi dan menemukan cara menghitung volume sebuah mahkota, lalu berlari ke jalan sambil berteriak "*Eureka!*", yang berarti "Aku menemukannya!", tanpa mengenakan pakaiannya.

Sebelumnya, Raja Hieron yang merupakan teman baiknya meminta ia untuk menghitung proporsi emas dan perak dalam mahkotanya. Untuk melaksanakan tugas itu, Archimedes perlu mengetahui volume mahkota tersebut. Namun, karena bentuknya yang rumit, tidak ada rumus yang tersedia untuk menghitung volumenya. Hingga pada suatu saat, ketika mandi berendam dalam bak, ia mendapat ide cemerlang bagaimana menghitung volume *benda pejal* sembarang, yaitu dengan mencelupkannya ke dalam air dan menghitung volume air yang dipindahkan oleh benda tersebut.

Demikian pula cerita tentang kematiannya, yang terjadi pada tahun 212 SM ketika Syracusa diserang pasukan tentara Roma. Ketika asyik

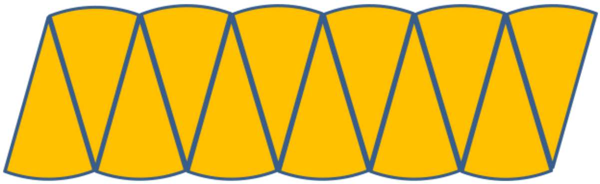
*Selain karyanya dalam Matematika, Archimedes dikenal pula karena karya-karyanya dalam Fisika. Kutipan pada awal bab ini berkaitan dengan temuannya tentang tuas. Selain itu, kita juga mengenal Hukum Archimedes yang berkaitan dengan gaya apung benda dalam air. Ia juga membuat banyak peralatan, antara lain katapel, yang dipakai sebagai senjata dalam perang. Konon, ia diincar oleh tentara Roma karena senjata ciptaannya telah banyak mencederai tentara Roma.*

mengerjakan hitung-hitungan matematika di atas tanah, ia dihampiri oleh seorang tentara Roma yang memang mengincarnya dan berniat membunuhnya. Konon, sebelum dihabisi, Archimedes sempat meminta waktu kepada tentara Roma tersebut untuk menyelesaikan hitung-hitungannya terlebih dahulu.

Dalam Matematika, kontribusi Archimedes tercatat mulai dari pemecahan masalah dengan menggunakan apa yang kita kenal sekarang sebagai Kalkulus, hingga Teori Bilangan. Salah satu masalah yang ia geluti dalam Teori Bilangan baru terpecahkan di tahun 1965.

Dalam Geometri, yang akan kita bahas sekarang, nama Archimedes melekat pada rumus luas lingkaran. Persisnya, Archimedes membuktikan bahwa luas lingkaran sama dengan setengah keliling kali jari-jarinya. Jika π menyatakan rasio keliling terhadap diameter lingkaran (yang kelak akan ditaksir nilainya oleh Archimedes), maka luas lingkaran sama π kali jari-jari kuadrat. (Pada waktu itu, Archimedes tidak menggunakan lambang bilangan π. Lambang ini baru dipakai oleh William Jones pada tahun 1706.)

Bagaimana Archimedes membuktikan rumus luas lingkaran tersebut? Dengan memotong lingkaran menjadi sejumlah bagian, dan menyusun potongan-potongan lingkaran tersebut seperti pada gambar di bawah ini, tampak bahwa luas lingkaran kira-kira akan sama dengan setengah keliling kali jari-jarinya.



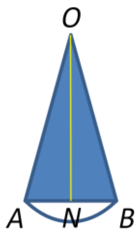
Archimedes membuktikan bahwa luas lingkaran memang persis sama dengan setengah keliling kali jari-jarinya, sebagai berikut. Andaikan luas lingkaran = $L > T$ = ½ × keliling × jari-jari. Pilih bilangan asli $n$ cukup besar sedemikian sehingga

$$T < \text{luas segi } 2^n \text{ beraturan} < L.$$

Misal $AB$ adalah salah satu sisi pada segi $2^n$ beraturan tersebut. Pada segitiga $OAB$, ruas garis $ON$ tegak lurus terhadap $AB$. Di sini, $|ON|$ < jari-jari (lihat gambar pada halaman berikut). Jadi,

$$\begin{aligned}\text{Luas segi } 2^n \text{ beraturan} &= 2^n \times (\tfrac{1}{2}|AB| \times |ON|)\\ &= \tfrac{1}{2} \times (2^n|AB| \times |ON|)\\ &< \tfrac{1}{2} \times \text{keliling} \times \text{jari-jari} = T,\end{aligned}$$

bertentangan dengan yang kita ketahui sebelumnya. Jadi pengandaian bahwa $L > T$ mestilah salah.




Dengan cara yang serupa, Archimedes juga sampai pada kesimpulan bahwa $L < T$ juga tidak mungkin terjadi. Jadi, berdasarkan Hukum Trikotomi, kemungkinan yang tersisa adalah $L = T$, dan ini adalah fakta yang ingin dibuktikan.

Berdasarkan temuan ini, kita dapatkan bahwa luas lingkaran berdiameter 1 sama dengan $K/4$, dengan $K$ menyatakan keliling lingkaran berdiameter 1. Selanjutnya, misal $L$ menyatakan luas lingkaran berjari-jari $r$. Maka, berdasarkan temuan Antiphon dan Eudoxus sebelumnya, yang menyatakan bahwa luas lingkaran sebanding dengan kuadrat dari diameternya, kita mempunyai

$$\frac{L}{K/4} = \frac{(2r)^2}{1^2}.$$

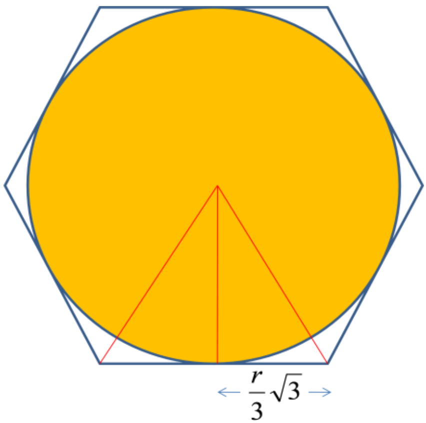
Akibatnya, kita peroleh $L = Kr^2$.

Masalahnya adalah, berapa nilai $K$ tersebut? Ingat bahwa $K$ sama dengan keliling lingkaran berdiameter 1. Menggunakan lambang bilangan yang diperkenalkan oleh William Jones, *K* adalah bilangan π yang nilainya kira-kira sama dengan 3,14.

Archimedes pun penasaran ingin mengetahui berapa nilai π yang merupakan perbandingan keliling lingkaran dan diameternya. Dengan menggunakan segi 96 beraturan "yang memuat lingkaran", Archimedes memperoleh taksiran

$$\pi < \frac{22}{7}.$$

Langkah-langkah yang dilakukannya untuk memperoleh taksiran ini adalah sebagai berikut. Mulai dengan segi enam beraturan yang memuat lingkaran (berjari-jari *r* sembarang), Acrhimedes mendapatkan bahwa π < 2√3 ≈ 530/153 (lihat kembali penjelasan pada Bab 2 tentang bagaimana menghampiri nilai √3 dengan Algoritma Euclid).




Selanjutnya, Archimedes membagi dua sudut di titik puncak segitiga (yang berimpit dengan titik pusat lingkaran) pada segi enam beraturan tadi, dan menaksir keliling lingkaran dengan keliling segi 12 beraturan yang memuat lingkaran. Dengan menggunakan kesebangunan dua segitiga dan perhitungan perbandingan panjang sisi-sisi segitiga yang terlibat (dengan teliti), Archimedes mendapatkan taksiran yang lebih halus, yaitu $\pi < 12 \times 153/571 = 1836/571$.

Ia kemudian membagi dua lagi sudut di titik puncak segi 12 beraturan untuk memperoleh segi 24 beraturan dan, dengan perhitungan yang semakin rumit, ia mendapatkan taksiran berikutnya, yaitu $\pi < 24 \times 153/1162{,}125$. Perhatikan betapa Archimedes tidak ingin mengabaikan nilai 0,125 yang sama dengan 1/8 itu dalam perhitungannya, guna mendapatkan taksiran yang teliti untuk $\pi$.

Langkah yang serupa dilakukan lagi oleh Archimedes, sehingga ia memperoleh taksiran untuk $\pi$ melalui segi 48 beraturan, yaitu $\pi < 48 \times 153/2334{,}25$, dan akhirnya melalui segi 96 beraturan, $\pi < 96 \times 153/4673{,}5 = 22/7$. *Eureka*!

Apakah Archimedes berhenti sampai di sini? Tidak, ia masih melanjutkan menaksir nilai $\pi$ "dari sebelah kiri", dengan menggunakan segi 96 beraturan "di dalam lingkaran". Dalam hal ini, ia memperoleh taksiran $\pi > 223/71$. Dengan hasil ini, Archimedes menyimpulkan bahwa $223/71 < \pi < 22/7$. Bila kita kemudian menganggap $\pi \approx 22/7$, maka kesalahan dalam penaksiran ini tentunya takkan lebih daripada $22/7 – 223/71 \approx 0{,}002$.

Archimedes menuliskan hitung-hitungan di atas dalam karyanya yang berjudul "Pengukuran pada Lingkaran" [T.L. Heath (ed.), *The Works of Archimedes*, Dover Edition, 1953].□