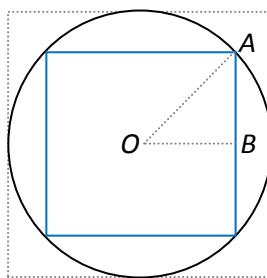


### 3 Antiphon dan Eudoxus Turun Tangan

Antiphon dan Eudoxus memang tidak setenar Pythagoras. Bahkan nama mereka mungkin tidak pernah disebut-sebut di buku pelajaran matematika sekolah. Padahal, Antiphon (425 SM) merintis suatu pemahaman yang cermat tentang lingkaran melalui segi banyak, dengan menerapkan apa yang dikenal sekarang sebagai *Prinsip Induksi Matematika*. Sementara itu, kontribusi Eudoxus (405–355 SM) pada pengetahuan tentang lingkaran, melanjutkan apa yang telah dirintis oleh Antiphon, amat signifikan. Bahkan, metode yang ia gunakan merupakan cikal-bakal *Teori Integral*, yang merupakan salah satu teori penting dalam matematika.

Sebagaimana telah disinggung pada Bab 1, orang Semit tahu bahwa lingkaran dapat dihampiri “dari dalam” oleh segi enam beraturan (lihat gambar lingkaran dan segi enam pada Bab 1). Antiphon me-langkah lebih jauh, yakni menghampiri lingkaran dengan segi  $2^n$  beraturan, dari dalam lingkaran tersebut. Ia mengamati bahwa luas persegi “di dalam lingkaran” melampaui  $\frac{1}{2}$  kali luas lingkaran tersebut. Lebih lanjut, ia bisa menghitung bahwa luas *segi delapan* beraturan di dalam lingkaran lebih besar daripada  $\frac{3}{4}$  kali luas lingkaran tersebut. Dengan Prinsip Induksi Matematika, akhirnya ia bisa membuktikan bahwa, untuk setiap  $n = 2, 3, 4, \dots$ , luas segi  $2^n$  beraturan di dalam lingkaran melampaui  $1 - 2^{1-n}$  kali luas lingkaran tersebut.

Penjelasannya kira-kira sebagai berikut. Misalkan  $R$  menyatakan jari-jari lingkaran. Dengan menggunakan *perbandingan trigonometri* yang kita kenal sekarang, panjang sisi persegi di dalam lingkaran sama dengan  $2R \cdot \cos 45^\circ$ . Jadi, “jari-jari” atau jarak titik pusat ke sisi persegi tersebut sama dengan  $R \cdot \cos 45^\circ$  (lihat gambar). Selanjutnya, “jari-jari” segi delapan beraturan di dalam lingkaran tersebut sama dengan  $R \cdot \cos 22,5^\circ$ . Bila kita bagi dua terus sudutnya hingga langkah ke- $(n-1)$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ , maka kita peroleh “jari-jari” segi  $2^n$  beraturan di dalam lingkaran tersebut sama dengan  $(R \cdot \cos 45^\circ)/2^{n-1}$ .



$$\cos \angle AOB = |OB| : |OA|$$

$$|OA| = R$$

$$\angle AOB = 45^\circ$$

$$\text{Jadi, } |OB| = R \cdot \cos 45^\circ$$

Bila persegi di dalam lingkaran diperbesar  $1/(\cos 45^\circ)$  atau  $\sqrt{2}$  kali, maka kita peroleh persegi dengan “jari-jari”  $R$  yang memuat lingkaran (lihat gambar). Jadi luas lingkaran lebih kecil daripada luas persegi berjari-jari  $R$ , yang sama dengan  $(\sqrt{2})^2$  atau 2 kali luas persegi di dalam lingkaran tersebut. Akibatnya, luas persegi di dalam lingkaran lebih besar daripada  $\frac{1}{2}$  kali luas lingkaran tersebut.

Dengan cara yang sama, bila segi delapan beraturan di dalam lingkaran diperbesar  $1/(\cos 22,5^\circ)$  kali, maka kita peroleh segi delapan beraturan dengan “jari-jari”  $R$  yang memuat lingkaran. Jadi luas lingkaran lebih kecil daripada luas segi delapan beraturan berjari-jari  $R$ ,

yang luasnya sama dengan  $1/(\cos^2 22,5^\circ)$  kali luas segi delapan beraturan di dalam lingkaran tersebut. Akibatnya, luas segi delapan beraturan di dalam lingkaran lebih besar daripada  $\cos^2 22,5^\circ$  kali luas lingkaran tersebut. Mengingat  $\cos^2 22,5^\circ > \frac{3}{4}$ , luas segi delapan beraturan di dalam lingkaran mestilah lebih besar daripada  $\frac{3}{4}$  kali luas lingkaran tersebut.

Selanjutnya, jika pada langkah ke- $(n-1)$  kita telah mengetahui bahwa  $\cos^2 t \geq 1 - 2^{1-n}$ , maka pada langkah ke- $n$  kita akan memperoleh

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{1}{2}t &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos t) \\ &> \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos^2 t) \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot (1 + 1 - 2^{1-n}) \\ &= 1 - 2^{-n}.\end{aligned}$$

Di sini kita telah menggunakan *Rumus Sudut Rangkap*  $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$  dan fakta bahwa  $\cos t > \cos^2 t$  untuk  $t > 0$  (tapi kecil). Dengan Prinsip Induksi Matematika, kita simpulkan bahwa untuk setiap  $n = 2, 3, 4, \dots$  luas segi  $2^n$  beraturan di dalam lingkaran akan lebih besar daripada  $1 - 2^{1-n}$  kali luas lingkaran tersebut.

**Prinsip Induksi Matematika**  
*sering digunakan dalam pembuktian pernyataan  $P(n)$  yang terkait dengan bilangan asli  $n$ . Jika  $P(1)$  benar dan, untuk setiap bilangan asli  $k$ , kebenaran  $P(k)$  menyebabkan kebenaran  $P(k+1)$ , maka pernyataan  $P(n)$  benar untuk setiap bilangan asli  $n$ .*

Orang Yunani Kuno sebelum Antiphon telah mengetahui bahwa luas segi  $2^n$  beraturan di dalam lingkaran sebanding dengan kuadrat dari *diagonal* terpanjangnya, yang sama dengan diameter lingkaran

tersebut. Bagi Antiphon, lingkaran mirip dengan segi  $2^n$  beraturan. Antiphon menganggap lingkaran sebagai segi banyak beraturan yang memiliki “tak terhingga sisi” (suatu anggapan yang akan kita tinjau ulang nanti). Dengan alasan yang agak kabur ini, Antiphon kemudian menyimpulkan bahwa luas lingkaran pun mestilah sebanding dengan kuadrat dari diameternya, yakni:

$$\text{Luas lingkaran berjari-jari } R = k \cdot (2R)^2 = 4kR^2.$$

Di sini  $k$  adalah suatu konstanta positif yang belum diketahui nilainya oleh Antiphon.

Mungkin karena penasaran dan kurang puas dengan argumentasi Antiphon yang agak kabur tadi, beberapa puluh tahun kemudian Eudoxus, murid dan teman diskusi Plato, turun tangan membuktikan ulang sifat bahwa luas lingkaran sebanding dengan kuadrat dari diameternya, dengan langkah-langkah yang lebih cermat. Dalam pembuktiannya, selain menggunakan fakta mengenai segi  $2^n$  beraturan “di dalam lingkaran” yang telah dibuktikan oleh Antiphon, Eudoxus juga menggunakan fakta bahwa luas segi  $2^n$  beraturan “yang memuat lingkaran” selalu lebih kecil daripada  $(1 + 2^{2-n})$  kali luas lingkaran tersebut. Jadi, selain menggunakan hampiran dari dalam, Eudoxus juga menggunakan hampiran dari luar. Lebih jauh, ia memanfaatkan fakta bahwa *galat* atau *kesalahan* dalam penghampiran ini dapat dibuat sekecil-kecilnya.

Buktinya adalah sebagai berikut. Misalkan  $k$  menyatakan luas lingkaran berdiameter 1. (Tentu saja  $k = \pi/4$ , tetapi seperti halnya Antiphon ketika itu Eudoxus juga belum mengetahui berapa nilai  $k$  tersebut). Misalkan pula  $L$  menyatakan luas lingkaran  $c$  yang ber-

diameter  $D$ . Akan dibuktikan bahwa  $L = kD^2$  secara ‘tidak langsung’ (yakni, *Pembuktian dengan Kontradiksi*). Andaikan  $L > kD^2$ . Tinjau segi  $2^n$  beraturan di dalam lingkaran berjari-jari 1 dan segi  $2^n$  beraturan di dalam lingkaran  $c$ , dengan  $n$  yang sama. Kita pilih  $n$  cukup besar sehingga  $2^{1-n} \cdot L < L - kD^2$ . Dalam hal ini,  $(1 - 2^{1-n}) \cdot L > kD^2$ .

Karena itu, dengan menggunakan fakta yang telah dibuktikan oleh Antiphon, diperoleh bahwa

$$\text{Luas segi } 2^n \text{ beraturan di dalam lingkaran } c > kD^2.$$

Selanjutnya, Eudoxus tahu bahwa luas segi  $2^n$  beraturan di dalam lingkaran  $c$  sama dengan  $D^2$  kali luas segi  $2^n$  beraturan di dalam lingkaran berdiameter 1. Tetapi, luas segi  $2^n$  beraturan di dalam lingkaran berdiameter 1 pastilah lebih kecil daripada luas lingkaran berdiameter 1 itu, yaitu  $k$ . Akibatnya, kita peroleh

$$kD^2 > (\text{luas segi } 2^n \text{ di dalam lingkaran berdiameter 1}) \cdot D^2 > kD^2,$$

yang tentu saja merupakan suatu kontradiksi. Jadi pengandaian bahwa  $L > kD^2$  mestilah salah.

Dengan cara yang serupa, tetapi dengan menggunakan fakta bahwa luas segi  $2^n$  beraturan “yang memuat lingkaran” lebih kecil daripada  $(1 + 2^{2-n})$  kali luas lingkaran tersebut, Eudoxus juga membuktikan bahwa  $L < kD^2$  tidak mungkin terjadi. Karena  $L > kD^2$  dan  $L < kD^2$  tidak mungkin, maka --- berdasarkan apa yang kita kenal sebagai *Hukum Trikotomi* --- Eudoxus sampai pada kesimpulan bahwa  $L = kD^2$ , yang berarti bahwa luas lingkaran sebanding dengan kuadrat dari dia- meternya.

Sampai di sini, pengetahuan orang Yunani Kuno tentang lingkaran cukup memuaskan. Namun, masih ada misteri yang tersisa. Berapa nilai konstanta  $k$  yang menyatakan luas lingkaran berdiameter 1 itu? Berbekal pengetahuan masa kini, kita akan mengatakan bahwa nilai  $k$  tersebut sama dengan  $\pi/4$ . Namun kemudian pertanyaannya adalah: berapa nilai  $\pi$  tersebut?

Hukum Trikotomi untuk bilangan real berbunyi sebagai berikut: Jika kita mempunyai dua bilangan  $a$  dan  $b$ , maka hanya satu di antara tiga kemungkinan berikut yang benar:  
 $a < b$ ,  $a = b$ , atau  $a > b$ .

Sesungguhnya,  $\pi$  hanya merupakan lambang, yang menyatakan perbandingan keliling dan diameter lingkaran. Baik Antiphon maupun Eudoxus telah mempelajari luas lingkaran, tetapi belum menyentuh keliling lingkaran --- padahal di sinilah kuncinya yang menentukan. Walau demikian, Antiphon dan Eudoxus telah mewariskan dua metode penting dalam memahami lingkaran, yaitu penghampiran melalui segi banyak (beraturan) dan pengontrolan kesalahannya, serta keampuhan pembuktian dengan kontradiksi yang melibatkan Hukum Trikotomi. Antiphon dan Eudoxus juga secara implisit telah menerapkan konsep *ketakterhinggaan (infinitesimal)*, sesuatu yang ditolak oleh Zeno (450 SM) dan Aristoteles (384–322 SM).

Kelak, muncul seorang matematikawan yang juga merangkap sebagai fisikawan dan insinyur tersohor dari Yunani Kuno, bernama Archimedes, yang akan mengembangkan lebih lanjut penemuan Antiphon dan Eudoxus tentang lingkaran. Sebelum sampai ke sana, kita akan tengok dahulu seorang matematikawan lainnya dari Yunani Kuno, yang bernama Euclid.□