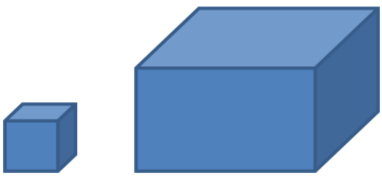
14 Menghitung Volume Bangun Ruang

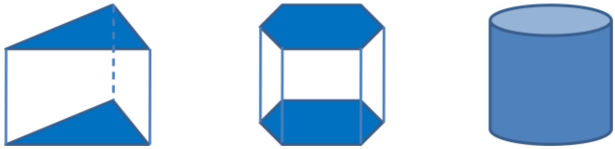
Pengetahuan kita tentang lingkaran berguna bagi kita dalam memahami bola dan bangun ruang lainnya yang mempunyai penampang lingkaran, seperti *elipsoida*, silinder, dan kerucut. Dengan menggunakan rumus luas lingkaran, misalnya, orang Yunani Kuno dapat menghitung volume *silinder* (tabung lingkaran), kerucut, dan bola. Sebelum kita sampai ke sana, kita mulai dengan volume bangun ruang yang paling sederhana terlebih dahulu, yaitu kubus.

Volume kubus dengan panjang rusuk 1 m adalah 1 cm × 1 cm × 1 cm = 1 cm^3. Bila panjang rusuknya r cm, maka volumenya sama dengan r^3 cm^3. Dengan menggunakan kubus satuan sebagai pembanding, kita dapat menghitung volume balok dengan panjang p cm, lebar l cm, dan tinggi t cm, yaitu p × l × t cm^3.

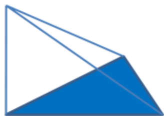


Selanjutnya, kita dapat menemukan rumus volume *prisma jajar genjang*, *prisma segitiga*, dan *prisma segi n sembarang*, yang sama dengan luas alas kali tinggi. Dengan metode penghampiran *a la*

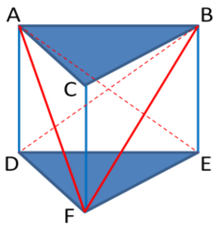
Eudoxus, kita juga dapat menyimpulkan bahwa volume silinder sama dengan luas alas kali tinggi.



Lalu bagaimana dengan polihedron sembarang? Untuk menghitung volumenya, kita hanya perlu mengetahui volume tetrahedron sembarang, karena setiap polihedron pada dasarnya merupakan gabungan dari sejumlah tetrahedron. Tetapi bagaimana kita meng-hitung volume sebuah tetrahedron?



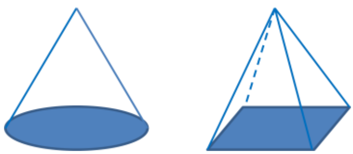
Dengan Kalkulus, atau persisnya konsep integral, kita dapat mem-buktikan bahwa volume tetrahedron ini sama dengan ⅓ × luas alas × tinggi. Rumus ini dapat pula diperoleh melalui pengamatan geometri. Kita sudah mengetahui bahwa volume prisma segitiga sama dengan luas alas kali tingginya. Nah, prisma segitiga ini dapat kita bagi menjadi tiga bidang empat yang sama volumenya (lihat gambar).



Perhatikan bahwa volume tetrahedron A.DEF sama dengan volume tetrahedron B.DEF. (Kedua tetrahedron mempunyai tinggi yang sama dan penampang pada ketinggian yang sama mempunyai luas yang sama, sehingga --- menurut *Prinsip Cavalieri* --- volumenya pasti sama.) Demikian juga volume tetrahedron F.ABC sama dengan volume tetrahedron A.DEF. Jadi, volume tiap tetrahedron sama dengan ⅓ × volume prisma, yaitu ⅓ × luas alas × tinggi.

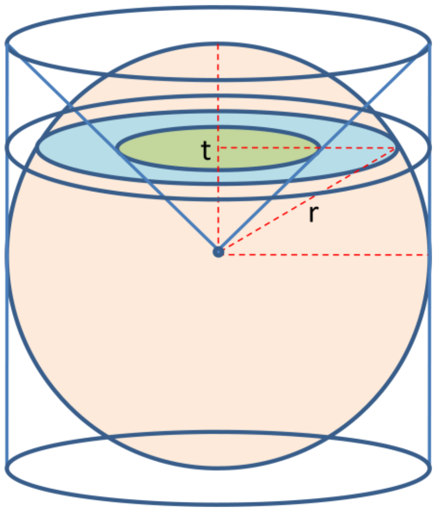
Prinsip Cavalieri dicetuskan oleh Bonaventura Francesco Cavalieri, matematikawan asal Italia, pada abad ke-17. Namun, prinsip ini berpijak pada metode penghampiran a la *Eudoxus, dan telah digunakan oleh Archimedes untuk menghitung volume bola (sebagaimana akan kita ulas pada abab ini).*

Dengan penghampiran *a la* Eudoxus atau penggunaan Prinsip Cavalieri, kita peroleh pula rumus yang sama untuk kerucut, piramida, dan berbagai bangun ruang serupa yang mempunyai alas sembarang dan puncak berupa titik, serta penampang mendatar yang sebangun dan proporsional dengan alasnya.



Nah, sekarang bagaimana dengan bola? Dari mana datangnya rumus volume bola: V = $\frac{4}{3}\pi r^3$? Sebagaimana telah disinggung di atas, rumus ini ditemukan oleh Archimedes dengan menggunakan prinsip yang sama dengan Prinsip Cavalieri.

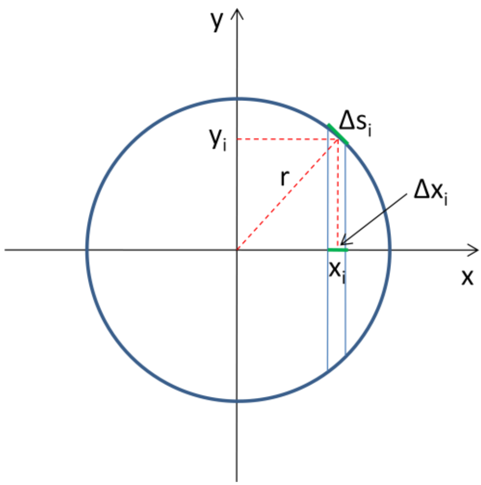
Dalam karyanya tentang "*Bola dan Silinder*", Archimedes meninjau kerucut (terbalik) dan bola dalam silinder yang berjari-jari sama, seperti diperlihatkan pada gambar di bawah ini. Misalkan jari-jari bola tersebut sama dengan r. Perhatikan penampang mendatar dari masing-masing bangun.



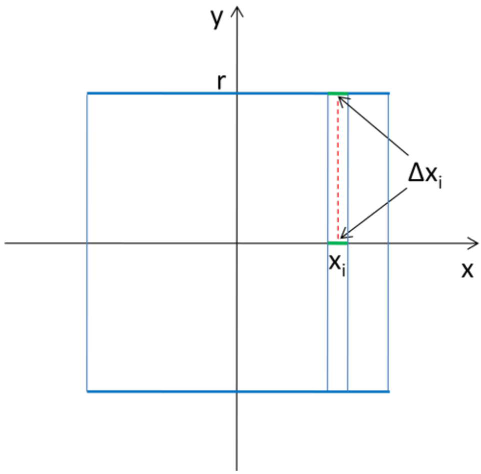
Penampang mendatar dari kerucut pada ketinggian t (dari pusat bola) berbentuk lingkaran dengan jari-jari t. Luas penampang ini sama dengan πt^2. Karena itu, luas penampang dari silinder yang berada di luar kerucut (pada ketinggian yang sama) sama dengan $\pi(r^2 - t^2)$. Sementara itu, penampang mendatar dari bola pada ketinggian t berbentuk lingkaran dengan jari-jari $\sqrt{r^2 - t^2}$. Luas penampang ini juga sama dengan $\pi(r^2 - t^2)$. Jadi, volume **setengah bola** sama dengan volume silinder di luar kerucut (yang mempunyai jari-jari r dan tinggi r), yaitu sama dengan $\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$. Archimedes pun akhirnya memperoleh rumus volume bola $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. *Eureka*!

Tidak berhenti dengan volume bola, Archimedes juga mendapatkan rumus luas permukaan bola: $A = 4\pi r^2$. Bagaimana ia sampai pada rumus ini? Lagi-lagi, dengan pengamatannya yang luar biasa, ia membandingkan bola dan silinder. Bila anda jeli, luas selimut silinder yang mempunyai jari-jari r dan tinggi 2r (tidak termasuk alas dan atasnya) juga sama dengan $4\pi r^2$. Archimedes memperlihatkan bahwa permukaan bola dan selimut silinder mempunyai luas yang sama, sebagai berikut.

Dengan metode penghampiran serupa, kita iris permukaan bola menjadi n potongan, lalu kita taksir luas permukaan tiap irisannya (lihat gambar). Untuk memudahkan, kita gunakan persamaan lingkaran dan gambar grafiknya pada bidang-xy. Di sini Δx_i menyatakan lebar irisan ke-i, dengan i = 1, … , n.



Perhatikan bahwa tiap irisan menyerupai frustum atau potongan dari kerucut. Luas permukaan frustum kerucut ini kira-kira sama dengan keliling yang ditempuh oleh titik (x_i, y_i) ketika berputar mengelilingi sumbu-x dikalikan dengan panjang ruas garis singgung di titik (x_i, y_i) yang terkait dengan irisan ke-i. Jika Δs_i menyatakan panjang ruas garis singgung tersebut, maka $A_i \approx 2\pi yi.\Delta s_i$. Tetapi, karena garis singgung pada lingkaran senantiasa tegak lurus pada jari-jari lingkaran tersebut, kemiringan garis singgung di titik (x_i, y_i) mestilah sama dengan $-x_i/y_i$. Akibatnya, $\Delta s_i \approx [1 + x_i^2/y_i^2]^{½}.\Delta x_i = (r/y_i).\Delta x_i$, sehingga $A_i \approx 2\pi r.\Delta x_i$. (Ingat bahwa $r^2 = x_i^2 + y_i^2$ untuk i = 1, … , n.) Ini tak lain sama dengan luas potongan selimut silinder berjari-jari r yang diiris dengan lebar irisan Δx_i (lihat gambar). Pada gambar ini, silinder dalam posisi melintang horisontal, bukannya berdiri vertikal.



Dengan demikian, bila kita jumlahkan seluruh luas permukaan irisan bola, maka hasilnya akan sama dengan luas selimut silinder dengan jari-jari r dan tinggi 2r. Jadi, luas permukaan bola berjari-jari r sama dengan $A = 4\pi r^2$. Sekali lagi, kita dapat membayangkan Archimedes berteriak kegirangan: *Eureka*! □