13 Segi-Tak-Terhingga dan Fraktal

Kalau lingkaran hanya mempunyai satu sisi, bukan segi-tak-terhingga, apakah ada bangun datar yang mempunyai tak terhingga sisi? Jawabannya ya, memang ada. Kita akan mempelajari beberapa di antaranya. Namun, sebelum kita sampai ke sana, mari kita ingat lagi apa yang dimaksud dengan sisi dari suatu bangun datar.

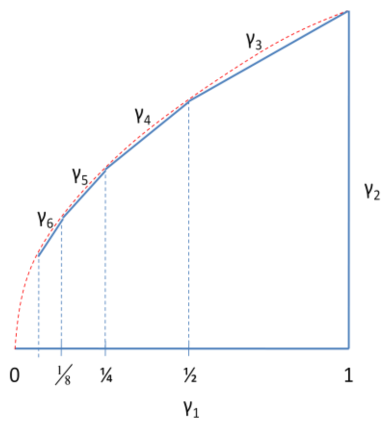
Pada Bab 7, telah dijelaskan bahwa bangun datar yang kita bahas dibatasi oleh sebuah lintasan tertutup sederhana, yang secara umum terdiri dari *sejumlah* kurva mulus. Nah, kurva-kurva mulus itulah yang kita definisikan sebagai sisi-sisi bangun datar tersebut. Jadi, bila lintasan tersebut terdiri dari tak terhingga kurva mulus, maka bangun datar yang dikelilinginya mempunyai tak terhingga sisi.

Terkait dengan itu, segi-tak-terhingga atau bangun datar dengan tak terhingga sisi akan mempunyai tak terhingga titik singular. Namun kelak kita akan melihat bahwa tidak semua titik singular secara otomatis akan menjadi titik sudut, karena keberadaan vektor singgung kanan atau kiri tidak selalu terjamin. Mengapa? Karena sebuah lintasan pada bidang hanya dipersyaratkan merupakan grafik suatu fungsi bernilai vektor (pada bidang) yang kontinu pada selang [a, b]. Padahal kita tahu bahwa fungsi yang kontinu belum tentu mempunyai turunan, baik turunan kanan ataupun turunan kiri.

Ingat bahwa ketakterhinggaan telah menjadi bahan perdebatan sejak zaman dahulu kala. Zeno dan Aristoteles menolak konsep ketak-terhinggaan, tetapi Antiphon, Eudoxus, dan Archimedes menerima dan menggunakannya. Saat ini, ketakterhinggaan termasuk konsep yang mendasar dalam matematika, terlebih dalam Kalkulus. Dengan konsep ketakterhinggaan, kita dapat menulis, misalnya, bahwa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

Sehubungan dengan itu tidaklah mustahil bagi kita untuk mempunyai sebuah segi-tak-terhingga dengan luas dan atau keliling terhingga. Berikut adalah beberapa contoh bangun datar yang memiliki tak terhingga sisi dan juga tak terhingga titik sudut. Kita mulai dengan bentuk yang relatif sederhana terlebih dahulu.



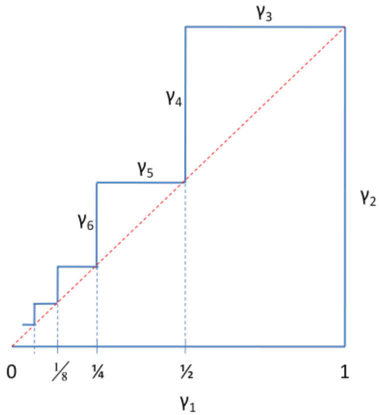
Grafik kurva putus-putus berwarna merah adalah grafik fungsi $y = \sqrt{x}$. Sekarang anda bayangkan bangun datar yang dibatasi oleh lintasan γ

= $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \ldots$ yang terdiri dari tak terhingga kurva mulus γ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, dengan γ_1 terdefinisi pada selang [0, 1], γ_2 pada selang [1, 2], γ_3 pada selang [2, 2½], γ_4 pada selang [2½, 2¾], dan seterusnya. Di sini, γ_3, γ_4, γ_5, dan seterusnya merupakan ruas-ruas garis yang menghubungkan dua titik pada kurva $y = \sqrt{x}$. Sebagai contoh, γ_3 adalah ruas garis yang menghubungkan titik (1, 1) dan $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Jelas bahwa γ terdefinisi pada selang [1, 3). Bila kita kemudian mendefinisikan $\gamma(3) = (0, 0)$, maka γ merupakan fungsi yang kontinu pada [0, 3], dengan $\gamma(3) = \gamma(0)$. Selain itu, setiap titik hanya dilalui satu kali. Jadi γ merupakan lintasan tertutup sederhana. Bangun datar yang dibatasi oleh γ mempunyai luas dan keliling terhingga. Namun, ia mempunyai tak terhingga sisi dan juga tak terhingga titik sudut yang merupakan pertemuan kurva γ_i dan γ_{i+1}, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Lalu bagaimana dengan titik (0, 0) yang merupakan titik awal dan sekaligus titik akhir γ? Pada bangun datar ini, titik (0, 0) merupakan titik sudut: vektor singgung kanan di titik (0, 0) sama dengan turunan kanan γ di $t = 0$ yang searah dengan vektor (0, 1), sementara vektor singgung kirinya sama dengan turunan kiri γ di $t = 3$ yang searah dengan vektor (-1, 0). Jadi, besar sudut di titik (0, 0) sama dengan 90^o, sebagaimana yang kita lihat pada gambarnya.

Sekarang mari kita tengok bangun datar yang serupa dengan bangun di atas tapi tak sama, seperti diperlihatkan pada gambar di bawah ini. Bangun ini juga mempunyai tak terhingga sisi dan tak terhingga titik sudut. Bedanya, titik (0, 0) yang merupakan titik awal dan sekaligus titik akhir lintasan tepi bangun ini bukan merupakan titik sudut. Mengapa? Karena vektor singgung kiri di titik (0, 0) tidak ada!



Ya, pada bangun datar yang memiliki tak terhingga sisi, hal tersebut merupakan kasus yang lumrah. Pada kasus ekstrim, banyaknya titik singular yang bukan merupakan titik sudut bisa lebih daripada satu, bahkan mungkin pula tak terhingga. Sebelum kita temui contohnya, kita perlu berkenalan dulu dengan *himpunan Cantor* yang unik.

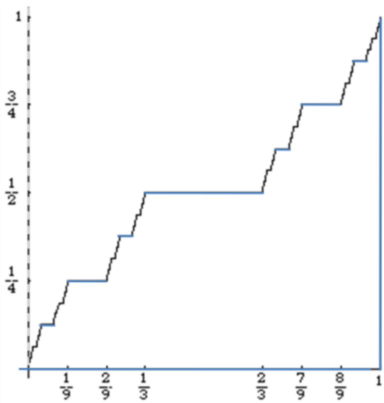
Dimulai dengan selang [0, 1], himpunan Cantor diperoleh secara iteratif sebagai berikut. Pertama, kita bagi selang ini menjadi tiga bagian sama panjang, dan buang selang buka (⅓, ⅔) yang berada di tengah. Maka, yang tersisa adalah gabungan dua buah selang tutup [0, ⅓] U [⅔, 1] = F_1. (Bantu dengan gambar bila perlu.)

Selanjutnya, kita bagi masing-masing selang menjadi tiga bagian sama panjang, dan buang kedua selang buka di tengah. Maka, kita mendapatkan sisanya yang merupakan gabungan empat buah selang tutup, yaitu [0,1/9] U [2/9,3/9] U [6/9,7/9] U [8/9,1] = F_2. Proses ini kita lanjutkan berulang-ulang, dan pada setiap langkah kita himpun F_i yang merupakan gabungan dari selang-selang yang tersisa.

Sekarang misalkan $F = \cap F_i$ (irisan dari semua F_i). Jelas bahwa F tidak kosong. Titik-titik ujung selang F_i, yakni bilangan-bilangan $(3k+1)/3^n$ dan $(3k+2)/3^n$ dengan k bilangan asli, merupakan anggota F. Tetapi anggota F bukan hanya titik-titik ini! Dalam *sistem bilangan terner* (basis 3), anggota F adalah semua bilangan yang **tidak** mengandung angka 1 di belakang koma.

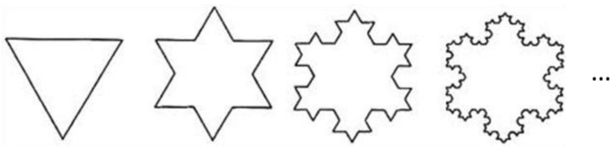
Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) adalah matematikawan asal Jerman yang mengembangkan Teori Himpunan. *Ia mempelajari* kardinalitas *berbagai himpunan bilangan dan menemukan antara lain bahwa bilangan real "jauh lebih banyak" daripada bilangan asli.*

Himpunan F dikenal sebagai himpunan Cantor *terner*, yang termasuk dalam dunia *fraktal*. Nah, terkait dengan himpunan Cantor, ada *fungsi Cantor* yang grafiknya seperti diperlihatkan di bawah ini. Fungsi ini bersifat *monoton naik* dan kontinu pada [0, 1], tetapi tidak mempunyai turunan di titik-titik ujung selang pada F_i.



Jadi, bangun datar yang dibatasi oleh lintasan tertutup sederhana γ yang terdiri dari selang $[0, 1]$ pada sumbu-x, ruas garis vertikal yang menghubungkan titik $(1, 0)$ dan $(1, 1)$, dan grafik fungsi Cantor, merupakan bangun yang memiliki tak terhingga sisi. Namun, titik-titik singular γ dalam hal ini bukan merupakan titik sudut, karena vektor singgung kanan atau vektor singgung kirinya tidak ada, kecuali titik $(1, 0)$ di pojok kanan bawah.

Contoh ketiga yang akan kita bahas berikutnya adalah bangun datar *serpihan salju Koch*, yang juga termasuk objek fraktal. Seperti halnya himpunan Cantor, serpihan salju Koch diperoleh secara iteratif, mulai dari sebuah segitiga sama sisi. Pada langkah pertama, dari bagian tengah setiap sisi, muncul segitiga sama sisi baru dengan panjang sisi sepertiga kali panjang sisi segitiga sebelumnya. Hal ini berulang pada langkah-langkah berikutnya, dan limit yang dihasilkan dari proses ini adalah serpihan salju Koch.



Apa yang menarik dengan serpihan salju Koch? Sebagai bangun datar, ia mempunyai lintasan tepi yang tidak mulus di mana-mana. Setiap titik pada lintasan tepinya merupakan titik singular, tetapi bukan titik sudut! Terkait dengan itu, serpihan salju Koch tidak mempunyai satu sisi pun. Pengertian sisi, dalam hal ini, menjadi tidak relevan. Catat juga bahwa luas serpihan salju Koch terhingga, tetapi kelilingnya tak terhingga. Ini merupakan keunikan fraktal!□