11 Lebih Jauh tentang Lingkaran

Lingkaran memang menarik ya! Selain fakta bahwa luasnya sama dengan seperempat keliling kali diameternya, kita juga telah menemukan beberapa sifat istimewa dari lingkaran, antara lain:

- lingkaran merupakan bangun datar satu sisi yang tidak mempunyai satu pun titik sudut (sehingga jumlah total sudut belok pada lingkaran sama dengan 0^o);
- sudut deviasi di setiap titik pada tepi lingkaran sama dengan sudut putarnya (sehingga grafik sudut deviasinya terhadap sudut putar merupakan garis lurus).

Masih banyak sifat menarik lainnya yang dimiliki oleh lingkaran. Mari kita tengok kembali persamaan kurva lingkaran:

$$\lambda(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Di sini $\lambda(t)$ mempunyai *turunan* (*pertama*):

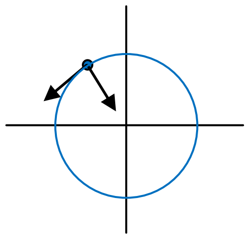
$$\lambda'(t) = (-R \sin t, R \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

dan *turunan kedua*:

$$\lambda''(t) = (-R \cos t, -R \sin t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Bila $\lambda(t)$ menyatakan vektor posisi suatu titik pada lingkaran, maka $\lambda'(t)$ menyatakan vektor singgung pada lingkaran di titik tersebut. (Catat bahwa $\lambda'(t) \perp \lambda(t)$, yang berarti bahwa vektor singgung pada lingkaran selalu *tegak lurus* terhadap vektor posisinya.)

Dengan membayangkan titik bergerak menelusuri lingkaran, vektor $\lambda'(t)$ merupakan *vektor kecepatan* titik tersebut pada saat t. Sementara itu, vektor $\lambda''(t)$ merupakan *vektor percepatan* titik tersebut pada saat t. Yang menarik di sini adalah bahwa $\lambda''(t) = -\lambda(t)$, yang memberitahu kita bahwa vektor percepatannya senantiasa mengarah ke titik pusat lingkaran (*sentrifugal*).



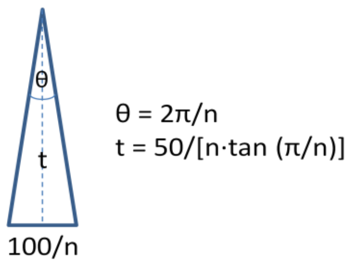
Jadi, pada setiap saat, titik bergerak searah dengan vektor singgungnya, tetapi ada vektor percepatan yang bekerja dan mengarah ke pusat, sehingga pada akhirnya titik tersebut tetap berada pada orbit lingkaran. (Itulah kira-kira yang terjadi pada Bumi yang bergerak mengelilingi Matahari.) Andaikan tidak ada vektor percepatan ini, maka titik akan melesat keluar dari orbit lingkaran, searah dengan vektor singgungnya.

Selanjutnya kita akan memperdalam sifat geometris bangun datar lingkaran. Bila kita bandingkan dengan persegi atau segi-n beraturan secara umum, lingkaran mempunyai kelebihan sebagai bentuk yang mempunyai luas terbesar untuk keliling tertentu.

Misalkan kita ingin membuat kebun di atas lahan yang luas dan kita akan memagarinya dengan 100 m pagar kawat yang tersedia. Bila kita buat kebun yang berbentuk persegi, maka panjang sisi-sisinya sama dengan 25 m, sehingga luas kebun kita akan sama dengan 625 m^2. Apakah kita bisa memperoleh kebun yang lebih luas?

Bila kita buat kebun yang berbentuk segi delapan beraturan, maka panjang sisinya sama dengan 12,5 m dan luas kebun kita akan sama dengan $312{,}5\cdot(1 + \sqrt{2}) \approx 754{,}44$ m^2. Jadi, dengan keliling yang sama (yaitu 100 m), kebun yang berbentuk segi delapan beraturan mempunyai luas lebih besar daripada kebun yang berbentuk persegi.

Hmm.. kita boleh menduga, bila kita buat kebun yang berbentuk segi n beraturan, maka semakin besar n akan semakin besar pula luas kebunnya. Mari kita lakukan perhitungan untuk mengetahui fakta yang sesungguhnya. Segi n beraturan dengan keliling 100 m terdiri dari n buah segitiga sama kaki dengan alas $a = 100/n$ m dan tinggi $t = 50/[n\cdot\tan(\pi/n)]$ m. Jadi luas segi n beraturan tersebut sama dengan $2500/[n\cdot\tan(\pi/n)]$ m^2.



Di SMA dipelajari fungsi trigonometri dasar, yaitu sin t, cos t, tan t dan cot t, serta bentuk limit berikut:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1.$$

Dengan pengetahuan tentang *limit fungsi trigonometri* yang lazimnya dipelajari di SMA, kita tahu bahwa n·tan(π/n) → π bila n → ∞. Jadi, bila n semakin besar, maka luas segi-n beraturan tersebut akan semakin mendekati 2500/π ≈ 795,77 m^2. Ini tidak lain merupakan luas lingkaran berjari-jari 50/π m. Dapat diperiksa bahwa keliling lingkaran ini sama dengan 100 m.

Dengan argumentasi yang mendalam (di luar jangkauan buku ini), memang dapat dibuktikan bahwa bentuk bangun datar dengan keliling tertentu yang mempunyai luas terbesar adalah lingkaran.

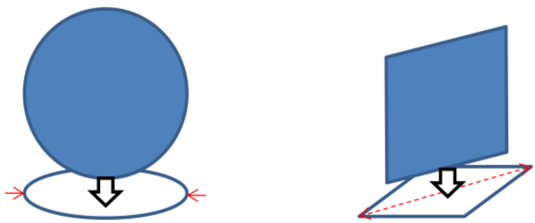
Sifat lingkaran yang memaksimumkan luas untuk keliling tertentu setara dengan sifat meminimumkan keliling untuk luas tertentu. Dengan perkataan lain, jika kita ingin membuat kebun dengan luas tertentu, katakanlah 1000 m^2, tetapi dengan keliling sekecil-kecilnya (misalnya untuk menghemat biaya pagar), maka bentuk kebun tersebut haruslah lingkaran. (Sifat serupa kita jumpai pada *bola* sebagai bangun ruang yang meminimumkan *luas permukaan* untuk *volume* tertentu. Kita akan mengulas hal ini pula nanti.)

Masih ada satu sifat lagi yang membuat lingkaran istimewa, yaitu bahwa ia merupakan bentuk yang ideal untuk penutup lubang saluran air kotor. Bila kita sering berjalan kaki dan memperhatikan trotoar, terlebih di kota-kota di Jepang, maka kita akan menemukan banyak penutup saluran air kotor (atau saluran lainnya) yang berbentuk cakram lingkaran. Nah, mengapa lingkaran? Jawabannya adalah karena ia tidak akan jatuh ke lubangnya!

Bila, misalnya, lubang dan penutupnya berbentuk persegi, maka – ketika sedang dilaksana-kan pekerjaan perbaikan – ada kemungkinan penutupnya masuk ke dalam lubangnya (karena panjang sisi persegi lebih kecil daripada panjang diagonalnya).

Konon, pertanyaan mengapa penutup saluran air kotor berbentuk lingkaran merupakan salah satu pertanyaan dalam tes awal untuk para pelamar ke Microsoft Inc.
[Sumber: M. Gladwell, "*Outliers*", 2008.]

Pada lingkaran, peristiwa itu tidak mungkin terjadi, karena diameter lingkaran konstan: dalam arah manapun kita mengukur, hasilnya akan sama saja. Jadi, dalam posisi bagaimanapun, penutup lubang berbentuk lingkaran tidak akan jatuh ke dalam lubangnya.



Apakah hanya lingkaran yang bersifat seperti itu? Ini merupakan pertanyaan yang menarik. Ternyata, ada banyak bentuk lain selain lingkaran yang juga ‘bagus’ untuk penutup lubang saluran air kotor. (Kita akan membahas bentuk-bentuk tersebut pada bab berikutnya.) Namun, dibandingkan dengan bentuk-bentuk lainnya, bagaimanapun kita akan menyimpulkan bahwa bentuk lingkaran-lah yang paling mudah dibuat (cukup dengan menggunakan sebuah jangka).

Tentu saja kita juga tidak melupakan bahwa bentuk cakram lingkaran banyak pula kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari, seperti pada roda kendaraan, cermin, jam dinding dan jam tangan, dan piringan hitam atau CD (abaikan lubangnya), serta makanan sejenis martabak dan pizza.□